



The Simulation Study of Normality Test Using Kolmogorov-Smirnov, Anderson-Darling, and Shapiro-Wilk

Giatma Dwijuna Ahadi ^a, Neni Nur Laili Ersela Zain ^b

^a Magister Statistika, FSAD, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, ITS Sukolilo, Surabaya, 60111, Indonesia.
Email: giatma.dwijunaahadi@gmail.com

^b Magister Matematika, FSAD, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, ITS Sukolilo, Surabaya, 60111, Indonesia.
Email: nnl.ersela.zain@gmail.com

ABSTRACT

The normal distribution is an important assumption for many statistical methods. The t -distribution is similar to the normal distribution, but there are differences in variance and free degree depending on the sample size. Normality testing usually uses Kolmogorov-Smirnov, Anderson-Darling, and Shapiro-Wilk tests. Simulating was performed on data derived from normal distributions, t -distributions, and exponential distributions. In the $N(10,2)$ generation data, it was found that the Shapiro-Wilk method was better than other methods, while in a large sample, it was found that the Anderson-Darling method was better than the other methods. The data for the generation of the distribution of $t(1)$ shows that the cumulative value of rejecting H_0 is close to 100%, meaning the data is not normally distributed. In a near-normal $t(20)$ distribution, but not a normal data gain, Anderson-Darling and Shapiro-Wilk test performance showed good results. Meanwhile, in the $t(100)$ generation data, the result was obtained that the most consistent cumulative value was the Anderson-Darling method. Furthermore, the $Exp(1)$ data generator produces a cumulative value of rejecting H_0 close to 100%, with the most consistent method being Kolmogorov-Smirnov. So it can be known that the normality test selection depends on the number of samples and the data distribution.

Keywords: Normal Distribution, Kolmogorov-Smirnov, Anderson-Darling, Shapiro-Wilk.

ABSTRAK

Distribusi normal adalah asumsi penting untuk banyak metode statistik. Distribusi- t mirip dengan Distribusi normal, namun berbeda pada varians dan derajat bebas yang bergantung pada ukuran sampel. Pengujian normalitas biasanya menggunakan metode seperti Kolmogorov-Smirnov, Anderson-Darling dan tes Shapiro-Wilk. Pengujian dilakukan pada data bangkitan dari distribusi normal, distribusi- t dan distribusi eksponensial. Pada data bangkitan $N(10,2)$ diperoleh bahwa metode Shapiro-Wilk lebih baik dari metode lainnya, sedangkan pada sampel besar didapatkan bahwa metode Anderson-Darling lebih baik dari metode yang lainnya. Data bangkitan distribusi $t(1)$ menunjukkan nilai kumulatif menolak H_0 mendekati 100% yang artinya data tidak berdistribusi normal. Pada distribusi $t(20)$ yang mendekati normal namun bukan bangkitan data normal, performa uji Anderson-Darling dan Shapiro-Wilk menunjukkan hasil yang baik. Sedangkan pada data bangkitan $t(100)$ diperoleh hasil bahwa nilai kumulatif yang paling konsisten adalah metode Anderson-Darling. Selanjutnya pada bangkitan data $Exp(1)$ menghasilkan nilai kumulatif menolak H_0 mendekati 100% dengan metode yang paling konsisten adalah Kolmogorov-Smirnov. Sehingga dapat diketahui bahwa pemilihan uji

* Corresponding author.

Alamat e-mail: giatma.dwijunaahadi@gmail.com

normalitas bergantung pada jumlah sampel dan sebaran datanya.

Keywords: Distribusi Normal, Kolmogorov-Smirnov, Anderson-Darling, Shapiro-Wilk.

Diserahkan: 18-05-2022; Diterima: 15-06-2023;

Doi: <https://doi.org/10.29303/emj.v6i1.131>

1. Pendahuluan

Pendugaan parameter dan pengujian hipotesis pada metode statistik merupakan salah satu tujuan dari statistika inferensia (Wirawan, 2016). Statistika inferensia bertujuan untuk melakukan suatu analisis dan menarik sebuah kesimpulan (Yam J.H., 2020). Statistika parametrik sebagai bagian dari statistika inferensia bergantung pada asumsi tetap yaitu sampel data berasal dari populasi dengan pola distribusi normal, data sampel bersifat random atau acak dengan skala pengukuran bersifat kontinu (skala interval), dan nilai variansi yang homogen (Walpole & Myers, 2011). Pengolahan data pada statistik parametrik meliputi dua kegiatan yaitu pengujian asumsi dan pengujian hipotesis. Adapun pengujian hipotesis hanya bisa dilakukan jika semua asumsi telah terpenuhi (Purwanto, 2011). Uji statistik parametrik mensyaratkan data harus berdistribusi normal, maka pengujian normalitas data harus dilakukan untuk mengetahui normal tidaknya distribusi data tersebut. Hal ini penting diketahui sebab akan berkaitan langsung dengan ketepatan pemilihan uji statistik yang akan digunakan selanjutnya (Adriansah & U.S., 2022). Contoh analisis statistika yang mengasumsikan distribusi normal adalah uji-t, analisis varian, analisis regresi dan sebagainya.

Kenormalan data dapat diketahui dengan melihat grafik histogram dengan cara membandingkan antara data observasi dengan distribusi yang mendekati distribusi normal. Selain itu uji normalitas dapat juga dilihat melalui grafik *normal probability plot*. Jika titik-titik atau penyebaran data pada grafik membentuk suatu pola garis yang lurus atau mengikuti garis diagonalnya maka data tersebut dikatakan berdistribusi normal (Zammaduaita, 2013). Akan tetapi uji normalitas dengan grafik belum bisa menjamin pengujian dapat dikatakan normal dikarenakan hasil pengujian yang dilihat secara visual dipengaruhi oleh perbedaan interpretasi setiap orang dalam melihat dan menentukan, sehingga perlu dilengkapi dengan adanya uji secara statistic (Karjono & Wijaya, 2017).

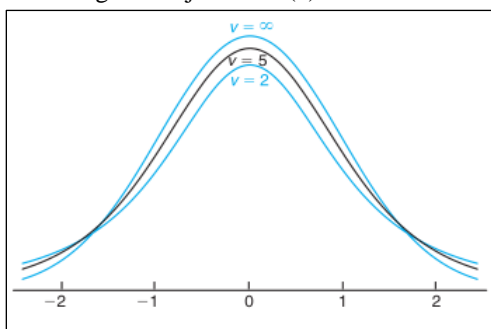
Uji normalitas merupakan uji statistik yang digunakan untuk menguji asumsi distribusi normal pada data. Data populasi dikatakan berdistribusi normal jika nilai rata-rata mengumpul di bagian tengah, nilai mode dan mediannya berada pada batas kewajaran tertentu. (Sintia dkk., 2022). Selanjutnya penarikan kesimpulan dilakukan dengan merumuskan hipotesis yang didasari pada tingkat kesalahan dan statistik hitung. Selain itu uji hipotesis juga dapat dilakukan dengan membandingkan p-value dengan tingkat kesalahan yang sesuai.

Menurut (Biu, Nwakuya & Wonu, 2019) *Kolmogorov-Smirnov* lebih tepat untuk sampel besar atau lebih dari 40. Sedangkan uji Shapiro-Wilk lebih akurat jika digunakan untuk sampel kecil. Selanjutnya menurut menurut Razali & Wah (2011) uji Anderson-Darling digunakan sebagai uji kenormalan atau *goodness of fit* untuk peubah kuantitatif yang bisa digunakan untuk menguji kenormalan berbagai macam sebaran data seperti sebaran data normal, lognormal, gamma, weibul, dan sebaran *logistic*. Anderson-Darling merupakan modifikasi dari Kolmogorov-Smirnov Test (KS Test yang telah terboboti. Kelebihan dari Anderson-Darling Test adalah uji ini lebih sensitive dari pada KS Test.

Berbagai studi telah dilakukan dalam mengembangkan metode untuk uji normalitas dengan syarat tertentu. Mbah dan Paothong (2014), dalam artikelnya diperbandingkan uji Shapiro-Francia (SF) dengan delapan uji normalitas lainnya, yaitu Kolmogorov-Smirnov (KS), Anderson-Darling (AD), Cramer von Mises (CM), Lilliefors (LF), Shapiro-Wilk (SW), Perason Chisquare (PC), Jarque-Bera (JB), dan D'Agostino (DA). Hasilnya menyatakan bahwa metode SF lebih unggul dibandingkan dengan metode lainnya untuk mendeteksi penyimpangan terhadap normalitas pada berbagai ukuran sampel. Kemudian penelitian serupa juga dilakukan oleh Putri (2020) yang membandingkan uji Kolmogorov-Smirnov (KS), Anderson-Darling (AD) dan Shapiro-Wilk (SW) berdasarkan simulasi Monte Carlo. Diperoleh hasil bahwa uji Shapiro-Wilk (SW) menunjukkan tingkat yang lebih baik daripada uji

lainnya jika sampel pengamatan berasal dari populasi tidak normal.

Pada pengujian hipotesis jika sampel yang diambil kecil dan nilai varians populasi tidak diketahui maka hasil akan menyimpang dari distribusi normal sehingga diperlukan distribusi *t-student*. Gambar 1 menunjukkan perbedaan antara distribusi normal ($v = \infty$) dan distribusi *t-students* dengan derajat bebas (v).



Gambar 1. Kurva distribusi *t-student*

Distribusi *t-student* mirip dengan Distribusi Normal, hanya saja ekor pada kurva distribusi *t-Student*, lebih lebar (Bain & Engelhardt, 1992). Meskipun mirip, distribusi data untuk *t-student* dan normal berbeda karena varians dan derajat bebas bergantung pada ukuran sampel. Hanya ketika ukuran sampel $n \rightarrow \infty$ kedua distribusi menjadi sama.

Selanjutnya akan dilihat apakah uji normalitas terhadap data yang mirip distribusi normal (yaitu data berdistribusi *t-student*) dapat diidentifikasi dengan baik atau tidak. Berdasarkan penjabaran diatas dalam penelitian ini akan digunakan perbandingan uji Kolmogorov-Smirnov, Shapiro-Wilk dan Anderson-Darling pada data bangkitan dari distribusi normal, *t-student* dan eksponensial.

2. Landasan Teori

2.1. Distribusi Normal

Distribusi Normal adalah distribusi dengan variabel acak kontinu, sehingga perhitungan probabilitasnya dilakukan dengan menentukan luas daerah di bawah kurva. Distribusi Normal merupakan distribusi yang simetris dan berbentuk genta atau lonceng. Kurva Distribusi Normal dipengaruhi oleh nilai harapan dan variansi $N(\mu, \sigma^2)$. Makin besar variansinya maka bentuk kurva normalnya semakin rendah dan distribusinya semakin lebar. Hal ini

disebabkan karena luas di bawah kurva fungsi densitas harus sama dengan satu (Bain & Engelhardt, 1992). Distribusi normal dibentuk berdasarkan dua parameter yaitu μ (rata-rata dari variabel acak) dan σ yang merupakan simpangan bakunya (Walpole & Myers, 2011). Suatu variabel random (X) dikatakan berdistribusi Normal dengan parameter μ dan σ dengan fungsi peluang sebagai berikut:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad -\infty < x < \infty \quad (2.1)$$

Distribusi Normal Standar adalah kasus khusus pada Distribusi Normal dimana jika variabel random X berdistribusi Normal dengan $\mu = 0$ dan $\sigma = 1$ (Kissell & Poserina, 2017). Misalkan $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ diketahui identik independen berdistribusi $N(\mu, \sigma^2)$ maka X dapat ditransformasi $Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$, sehingga fungsi peluangnya menjadi:

$$g(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(z)^2}, \quad -\infty < z < \infty \quad (2.2)$$

2.2. Distribusi *t-student*

Student-t atau distribusi *t* adalah suatu distribusi yang digunakan untuk mengakomodasi ketebalan ekor pada kurva kelompok distribusi normal (Bain & Engelhardt, 1992). Variabel random X berdistribusi *t* dengan $\mu = 0$, σ^2 dan derajat kebebasan $v > 2$ memiliki fungsi peluang sebagai berikut:

$$f_t(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi(v-2)\sigma^2}\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \left(\frac{1}{1+\frac{x^2}{(v-2)\sigma^2}}\right)^{\frac{v+1}{2}}, \quad (2.3)$$

Derajat kebebasan (v) mengendalikan ketebalan ekor distribusi. Semakin kecil derajat kebebasan, maka ekornya semakin tebal pada kedua sisi. Sementara itu, semakin besar derajat bebas (untuk $v > 30$), distribusi semakin mendekati Normal (Blangiardo & Cameletti, 2015).

Apabila Z memiliki distribusi normal baku dan V berdistribusi chi-square maka bentuk distribusi *student-t* secara umum dapat ditulis menjadi :

$$T = \frac{Z}{\sqrt{V/v}}$$

dengan v merupakan derajat bebas sesuai persamaan (2.3)

2.3. Distribusi Eksponensial

Distribusi Eksponensial pertama kali diperkenalkan oleh Gupta dan Kundu pada Tahun 1999. Distribusi ini diambil dari salah satu fungsi kepadatan kumulatif yang digunakan pada pertengahan Abad 19 (Gompertz-Verhulst) untuk membandingkan tabel kematian dan menghasilkan laju pertumbuhan penduduk (Gupta & Kundu, 1999). Variabel random X berdistribusi eksponensial dengan β memiliki fungsi peluang sebagai berikut:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}}, & x \geq 0 \\ 0, & x \text{ lainnya} \end{cases} \quad (2.4)$$

Dengan $\beta > 0$, x adalah interval rata-rata, β adalah parameter rata-rata, dan e adalah eksponensial dengan nilai 2,71828.

2.4. Uji Hipotesis

Uji hipotesis sebagai bagian dari Statistika Inferensial digunakan untuk menguji kebenaran atas suatu pernyataan secara statistik serta menarik kesimpulan akan diterima atau ditolaknya pernyataan tersebut (Denis, 2021). Pengujian hipotesis digunakan untuk menguji suatu klaim atau hipotesis tentang suatu parameter dalam suatu populasi, dengan menggunakan data yang diukur dalam suatu sampel. Jika sampel acak memberikan indikasi yang dapat mendukung hipotesis maka hipotesis tersebut dapat diterima, sedangkan jika sampel acak itu memperlihatkan indikasi yang bertentangan terhadap hipotesis, maka hipotesis tersebut ditolak.

Komponen umum dalam uji hipotesis adalah daerah kritis, statistik uji dan tingkat signifikansi/kesalahan. Besarnya kesalahan dinyatakan dalam nilai probabilitas (Walpole & Myers, 2011). Kesalahan Tipe I ini dilambangkan dengan simbol α (alfa), dan merupakan probabilitas

jangka panjang sebuah penelitian menolak hipotesis nul (H_0), ketika hipotesis nul (H_0) benar.

2.5. Uji Kolmogorov-Smirnov

Beberapa uji telah dikembangkan dimana pendistribusian statistik uji bergantung pada bentuk eksplisit parameter pada distribusi tertentu. Metode uji Kolmogorov-Smirnov digunakan untuk mengetahui apakah suatu data mengikuti suatu distribusi tertentu ketika mean dan variansinya diketahui (Biu, Nwakuya & Wonu, 2019). Uji ini beranggapan bahwa distribusi data yang di uji bersifat kontinyu dan sampel random. Menurut Kolmogorov (1933) statistik uji Kolmogorov-Smirnov D didefinisikan sebagai :

$$D = \max(D^+, D^-) \quad (2.5)$$

dengan

$$D^+ = \max \left(\left| \frac{i}{n} - F(x_i) \right| \right) \quad i = 1, 2, 3 \dots n$$

$$D^- = \max \left(\left| F(x_i) - \frac{i-1}{n} \right| \right) \quad i = 1, 2, 3 \dots n$$

$F(x_i)$ merupakan fungsi kumulatif distribusi normal dan n menyatakan jumlah sampel. Adapun pengambilan keputusan dapat dilihat dari daerah kritis. Apabila nilai D lebih besar dari nilai D tabel ($D > D_{tab}$) maka tolak H_0 dan terima H_1 .

2.6. Uji Anderson-Darling

Uji Anderson-Darling adalah uji kesesuaian yang menguji apakah data berasal dari distribusi tertentu. Jika nilai-nilai kritis dalam uji Kolmogorov-Smirnov tidak tergantung pada distribusi tertentu yang sedang diuji sedangkan uji Anderson-Darling memanfaatkan distribusi tertentu dalam menghitung nilai kritis. Ini memiliki keuntungan yang memungkinkan tes yang lebih sensitif, tetapi kelemahannya adalah nilai-nilai kritis harus dihitung untuk setiap distribusi (Nosakhare & Bright, 2017). Misalkan $x_1 x_2 x_3 \dots x_n$ merupakan n sampel terurut dari pengamatan, maka statistik uji Anderson-Darling (A^2) adalah : (D'Agostino & Stephens, 1986)

$$A^2 = -n - \frac{1}{n} \sum_i^n (2i - 1) [\ln(F(z_i)) + \ln(1 - F(z_{n+1-i}))]$$

$$i = 1, 2, 3 \dots n \quad (2.6)$$

$F(z)$ = fungsi distribusi kumulatif normal standart. Pengambilan keputusan untuk menolak atau menerima H_0 adalah dengan membandingkan A^2 terhadap nilai kritis. Tolak H_0 jika nilai A^2 lebih besar dari nilai kritis atau $p - value < \alpha$.

2.7. Uji Shapiro-Wilk

Metode uji Shapiro-Wilk merupakan salah satu alternatif prosedur dalam pengujian normalitas (Farrel & Stewart, 2006). Statistik uji diperoleh berdasarkan nilai *expected value* normal standar dan nilai rata-rata dari sampel (Shapiro & Wilk, 1965). Misalkan $x_1 x_2 x_3 \dots x_n$ merupakan statistik terurut dari suatu pengamatan, maka statistik uji Shapiro-Wilk (W) adalah :

$$W = \frac{(\sum_1^n a_i x_i)^2}{\sum_1^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (2.7)$$

Selanjutnya W dibandingkan dengan daerah kritis untuk dilakukan pengambilan keputusan. Tolak H_0 jika nilai $W <$ nilai kritis atau $p - value < \alpha$.

3. Metode Penelitian

Data yang digunakan dalam pengamatan ini adalah data bangkitan dengan menggunakan software R. Simulasi dilakukan dengan jumlah sampel dan tingkat kesalahan (α) yang berbeda di setiap skenario data. Pada simulasi ini dibatasi hanya menggunakan kesalahan tipe I (α) sebagai *power test*. Berikut langkah-langkahnya :

1. Membangkitkan data sebanyak n_1, n_2, n_3, n_4 dan n_5 berdistribusi $N(\mu = 10, \sigma^2 = 4)$, $t(1)$, $t(20)$, $t(100)$ dan $E(\theta = 1)$
2. Menentukan nilai statistik uji Kolmogorov-Smirnov, Anderson-Darling dan Shapiro-Wilk
3. Pengambilan keputusan tolak atau terima H_0 dibandingkan dengan tingkat kesalahan α yang berikan
4. Mengulangi langkah 1-3 sebanyak k iterasi.

5. Menentukan nilai $\bar{\alpha}$ untuk masing masing statistik uji, nilai $\bar{\alpha}$ merupakan frekuensi kumulatif percobaan yang menolak H_0 . Statistik uji dikatakan baik jika nilai $\bar{\alpha}$ mendekati α

4. Hasil dan Pembahasan

Pada penelitian ini perbandingan uji normalitas data akan dilakukan dengan menggunakan 3 macam distribusi data, 4 ukuran tingkat kesalahan dan 5 ukuran sampel atau jumlah data. Pada setiap distribusi akan dilakukan iterasi sebanyak 1000 kali.

Data akan dibangkitkan berdasarkan distribusi $N(10,2)$, distribusi $Exp(1)$, distribusi $t(1)$, $t(20)$ dan $t(100)$. Ukuran sampel untuk masing-masing data bangkitan adalah $n = 20$, $n = 50$, $n = 100$, $n = 200$ dan $n = 500$. Tingkat kesalahan (α) yang digunakan yaitu $\alpha = 0.20$, $\alpha = 0.10$, $\alpha = 0.05$, $\alpha = 0.01$, $\alpha = 0.25$. Ukuran α yang berbeda dipertimbangkan untuk menyelidiki pengaruh tingkat signifikansi pada kekuatan setiap uji statistik. Simulasi dilakukan dengan bantuan R berdasarkan hipotesis sebagai berikut:

H_0 : Data mengikuti distribusi Normal

H_1 : Data tidak berdistribusi Normal

Hasil simulasi yang dijalankan menunjukkan banyaknya H_0 yang diterima untuk data yang dibangkitkan dari distribusi Normal dan banyaknya H_0 yang ditolak untuk data yang dibangkitkan tidak dari distribusi Normal.

4.1. Data Bangkitan Distribusi Normal

Simulasi dilakukan dengan membangkitkan data berdistribusi Normal dengan $\mu = 10$ dan $\sigma = 2$. Hasil uji normalitas dengan metode Kolmogorov-Smirnov, Anderson-Darling dan Shapiro-Wilk ditunjukkan pada tabel berikut:

Tabel.1 Hasil Simulasi Data Berdistribusi Normal

N	Metode Uji	Tingkat Kesalahan (α)			
		20%	10%	5%	1%
20	KS	17%	8%	3.7%	0.5%
	AD	20%	9%	5.2%	1.4%
	SW	19%	9%	5.0%	1.1%
50	KS	18%	8%	3.4%	0.8%
	AD	19%	9%	5.0%	0.5%

	SW	19%	9%	4%	0.6%
	KS	19%	8%	4.8%	1.3%
100	AD	23%	11%	5.5%	1.5%
	SW	21%	12%	6%	1%
	KS	19%	10%	4.8%	0.6%
200	AD	22%	10%	3.9%	0.7%
	SW	20%	9%	3.7%	0.5%
	KS	20%	9%	5.2%	1.2%
500	AD	21%	10%	5.3%	1%
	SW	20%	11%	5.7%	1.1%

Pada Tabel.1 diketahui nilai kumulatif $\bar{\alpha}$ mendekati α , ini menunjukkan ketetapan masing-masing metode dalam uji kenormalan data.

Pada sampel kecil (N=20) uji Shapiro-Wilk menunjukkan selisih nilai α yang lebih baik dari dua uji lainnya. Sedangkan untuk ukuran sampel N=500, metode uji Anderson-Darling menunjukkan selisih nilai α yang lebih konsisten dibandingkan dua uji lainnya.

4.2. Data Bangkitan Distribusi t

Skenario uji selanjutnya dilakukan pada data yang dekat dengan distribusi normal. Distribusi t-student merupakan distribusi yang memiliki bentuk kurva yang mirip dengan kurva normal. Jika sampel kecil dan varians tidak diketahui maka distribusi t-student dapat digunakan. Simulasi dilakukan dengan membangkitkan data berdasarkan distribusi t-student dengan df masing-masing $df = (1,20, 100)$.

4.2.1. Data Bangkitan dengan t(1)

Hasil uji normalitas dengan metode Kolmogorov-Smirnov, Anderson-Darling dan Shapiro-Wilk ditunjukkan pada Tabel.2

Tabel.2 Hasil Simulasi Data Berdistribusi t(1)

N	Metode Uji	Tingkat Kesalahan (α)			
		20%	10%	5%	1%
20	KS	50%	32%	20.0%	5.2%
	AD	93%	90%	87.1%	79.0%
	SW	92%	90%	85.4%	76.9%
50	KS	85%	67%	46.5%	17.8%
	AD	100%	100%	99.6%	99.2%
	SW	100%	100%	99.6%	98.9%
100	KS	98%	94.0%	87.0%	52.7%

	AD	100%	100%	100%	100%
	SW	100%	100%	100%	100%
200	KS	100%	100%	99.8%	97.8%
	AD	100%	100%	100%	100%
	SW	100%	100%	100%	100%
500	KS	100%	100%	100%	100%
	AD	100%	100%	100%	100%
	SW	100%	100%	100%	100%

Hasil menunjukkan pada N kecil uji Kolmogorov-Smirnov menunjukkan nilai $\bar{\alpha}$ yang mendekati nilai α dibandingkan uji yang lain. Nilai kumulatif $\bar{\alpha}$ terus naik sampe 100%, berbanding lurus dengan jumlah datanya. Pada skenario data ini uji Anderson-Darling dan Shapiro-Wilk lebih baik untuk digunakan.

4.2.2. Data Bangkitan dengan t(20)

Hasil uji normalitas dengan metode Kolmogorov-Smirnov, Anderson-Darling dan Shapiro-Wilk ditunjukkan pada Tabel.3

Tabel.3 Hasil Simulasi Data Berdistribusi t(20)

N	Metode Uji	Tingkat Kesalahan (α)			
		20%	10%	5%	1%
20	KS	21%	10%	5.1%	1.7%
	AD	24%	13%	7.5%	1.5%
	SW	23%	13%	8.1%	2.3%
50	KS	22%	11%	5.6%	1.2%
	AD	27%	15%	8.3%	9.1%
	SW	28%	16%	9.1%	2.1%
100	KS	18%	9.0%	4.1%	0.3%
	AD	25%	14%	7.3%	1.5%
	SW	29%	17%	10.0%	3.4%
200	KS	19%	10%	4.6%	1.1%
	AD	30%	17%	10%	2.4%
	SW	34%	23%	14.5%	5.3%
500	KS	20%	11%	6.2%	1.2%
	AD	35%	22%	13.4%	5.7%
	SW	44%	33%	25.2%	12.6%

Data bangkitan dengan $df = 20$ akan menghasilkan distribusi yang mendekati normal. Hal ini ditunjukkan pada nilai kumulatif $\bar{\alpha}$ yang mendekati α . Pada uji Anderson-Darling dan Shapiro-Wilk, nilai kumulatif $\bar{\alpha}$ terus meningkat

sebanding dengan jumlah N sedangkan Kolmogorov-Smirnov menunjukkan nilai yang konsisten mendekati α . Maka pada skenario $t(20)$ Anderson-Darling dan Shapiro-Wilk lebih baik untuk digunakan.

4.2.3. Data Bangkitan dengan $t(100)$

Semakin besar df maka data bangkitan yang dihasilkan akan mendekati distribusi normal. Hasil uji normalitas dengan metode Kolmogorov-Smirnov, Anderson-Darling dan Shapiro-Wilk ditunjukkan pada Tabel.4.

Tabel.4 Hasil Simulasi Data Berdistribusi $t(100)$

N	Metode Uji	Tingkat Kesalahan (α)			
		20%	10%	5%	1%
20	KS	18%	10%	5.20%	0.7%
	AD	20%	10%	4.3%	0.8%
	SW	20%	10%	4.3%	0.7%
50	KS	22%	12%	5.40%	1.7%
	AD	22%	11%	6.10%	1.0%
	SW	22%	12%	6.60%	0.8%
100	KS	20%	10.0%	4.7%	1.1%
	AD	20%	10.0%	6.0%	1.1%
	SW	19%	10.0%	5.8%	1.4%
200	KS	20%	10%	4.4%	0.8%
	AD	21%	10%	5.2%	1.2%
	SW	20%	10%	6.5%	1.7%
500	KS	17%	8%	3.7%	0.7%
	AD	21%	10%	5.4%	0.7%
	SW	21%	11%	5.5%	1.2%

Pada Tabel.4 diketahui nilai kumulatif $\bar{\alpha}$ mendekati α , ini menunjukkan ketetapan masing-masing metode dalam uji kenormalan data. Pada semua sampel N metode uji Anderson-Darling menunjukkan selisih nilai $\bar{\alpha}$ dengan α yang lebih konsisten dibandingkan dua uji lainnya.

4.3. Data Bangkitan Distribusi Eksponensial

Data dibangkitkan berdasarkan distribusi yang bukan berasal dari distribusi Normal. Sehingga nilai kumulatif akan memiliki presentase lebih tinggi untuk menolak H_0 . Simulasi dilakukan dengan membangkitkan data berdistribusi Eksponensial

dengan $\theta = 1$. Hasil uji normalitas dengan metode Kolmogorov-Smirnov, Anderson-Darling dan Shapiro-Wilk ditunjukkan pada Tabel 5.

Tabel.5 Hasil Simulasi Data Berdistribusi Eksponensial

N	Metode Uji	Tingkat Kesalahan (α)			
		20%	10%	5%	1%
20	KS	100%	100%	100.00%	100%
	AD	92%	86%	78.2%	57.4%
	SW	94%	90%	83.70%	63.2%
50	KS	100%	100%	100.00%	100.0%
	AD	100%	100%	99.80%	99.0%
	SW	100%	100%	99.90%	99.8%
100	KS	100%	100%	100%	100%
	AD	100%	100%	100%	100%
	SW	100%	100%	100%	100%
200	KS	100%	100%	100%	100%
	AD	100%	100%	100%	100%
	SW	100%	100%	100%	100%
500	KS	100%	100%	100%	100%
	AD	100%	100%	100%	100%
	SW	100%	100%	100%	100%

Semua metode uji menghasilkan nilai kumulatif menolak H_0 mendekati 100% untuk sampel berukuran besar. Pada sampel kecil terdapat nilai persentase $\bar{\alpha}$ di bawah 90% yang ditunjukkan oleh Anderson-Darling dan Shapiro-Wilk. Maka metode Kolmogorov-Smirnov lebih baik untuk uji kenormalan data pada skenario ini.

Pembahasan

Berdasarkan hasil simulasi dengan berbagai ukuran sampel dan bangkitan dari distribusi normal diperoleh hasil bahwa uji Kolmogorov-Smirnov paling lemah untuk sampel berukuran kecil. Hasil ini sesuai dengan penelitian Putri (2020). Performa keseluruhan untuk data bangkitan dari distribusi $N(10,4)$ uji Anderson-Darling dan Kolmogorov-Smirnov memiliki tingkat kekuatan yang relatif sama. Sedangkan pada data bangkitan yang bukan dari distribusi normal menunjukkan performa yang baik untuk uji Kolmogorov-Smirnov dan Shapiro-Wilk. Hasil tersebut menjelaskan ukuran sampel kecil dan tingkat kesalahan mempengaruhi hasil signifikansi.

Pada simulasi bangkitan data yang mirip distribusi normal dilakukan dengan distribusi $t(20)$ dan $t(100)$. Data bangkitan dengan df semakin besar akan mendekati distribusi normal. Walaupun

mendekati namun distribusi $t(20)$ tetap data bangkitan yang bukan distribusi normal. Performa uji Anderson-Darling dan Shapiro-Wilk, menunjukkan hasil yang lebih baik dengan ukuran sampel yang terus meningkat. Hal ini sesuai dengan penelitian Putri (2020) yang menjelaskan kekuatan uji Anderson-Darling dan Shapiro-Wilk lebih baik daripada Kolmogorov-Smirnov.

5. Kesimpulan

Simulasi dilakukan sebanyak 1000 kali. Setiap iterasi data dibangkitkan sebanyak 20, 50, 100, 200 dan 500.

1. Data bangkitan distribusi $N(10,2)$ diperoleh hasil bahwa untuk uji normalitas, metode uji Shapiro-Wilk lebih baik digunakan pada data sampel kecil. Sedangkan pada sampel besar uji Anderson-Darling lebih baik daripada dua uji lainnya.
2. Data bangkitan distribusi $t(1)$ menunjukkan nilai kumulatif menolak H_0 mendekati 100% artinya data tidak berdistribusi Normal. Pada skenario $t(20)$ uji Anderson-Darling dan Shapiro-Wilk menghasilkan nilai kumulatif $\bar{\alpha}$ yang terus meningkat jauh dari α , sedangkan Kolmogorov-Smirnov menunjukkan nilai yang konsisten mendekati α . Maka Anderson-Darling dan Shapiro-Wilk lebih baik untuk digunakan. Semakin besar df maka data akan mendekati distribusi normal. Hal ini ditunjukkan pada data bangkitan $t(100)$, diperoleh hasil nilai kumulatif yang paling konsisten adalah Anderson-Darling
3. Data bangkitan distribusi $Exp(1)$ menghasilkan nilai kumulatif menolak H_0 mendekati 100% untuk sampel besar. Metode uji Kolmogorov-Smirnov paling konsisten dalam uji kenormalan pada skenario ini

Pemilihan metode uji normalitas sangat bergantung pada jumlah sampel dan sebaran datanya. Jika sampel kecil dapat memilih uji Shapiro-Wilk, lainnya bisa menggunakan Anderson-Darling atau Kolmogorov-Smirnov. Apabila data bersifat empiris maka dapat digunakan uji Kolmogorov-Smirnov. Pada sebaran data t -students yang mirip dengan normal uji Anderson-Darling menghasilkan tingkat yang paling konsisten.

DAFTAR PUSTAKA

- Ahmad, F. & Sherwani, R. A. K. (2015). Power Comparison of Various Normality Tests. *Pak.j.stat.oper.res*, XI(3), 331-345.
- Ardiansah & Supardi U.S. (2022). *Statistika Ekonomi 1 (Edisi Revisi)*. Widina Bhakti Persada : Bandung.
- Bain L.J & Max, E. (1991). *Introduction To Probability and Mathematical Statistics*. California: Duxbury.
- Bain, L.J. & Engelhardt M. (1992). *Introduction to Probability and Mathematical Statistics (2nd ed.)*. United State Of America: Duxbury.
- Biu, E.O., Nwakuya, M.T., & Wonu, N. (2019). Detection of Non-Normality in Data Sets and Comparison between Different Normality Tests. *Asian Journal of Probability and Statistics*, 5(4), 1-20.
- Blangiardo, M. & Cameletti, M. (2015). *Spatial and Spatio-temporal Bayesian Models with R - INLA*. Chichester: John Wiley & Sons.
- Cohen, J. (1988). *Statistical Power Analysis for The Behavioral Sciences*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- D'Agostino, R.B. & Stephens, M.A. (1986): *Goodness-of-fit techniques*. New York, Marcel Dekker.
- Dahlan, M.S. (2009). *Statistik untuk Kedokteran dan Kesehatan, Edisi 4 (Deskriptif, Bivariat dan Multivariat, dilengkapi Aplikasi dengan Menggunakan SPSS)*. Jakarta: Salemba Medika.
- Denis, D.J. (2021). *Applied Univariate, Bivariate, And Multivariate Statistics : Understanding Statistics for Social and Natural Scientists, with Applications in SPSS and R*. USA: John Wiley & Sons.
- Farrel, P. J & Stewart, K. R. (2006). Comprehensive Study of Tests for Normality and Symmetry; Extending the Spiegelhalter Test. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 76(9), 803-816.
- Gosset, W. S. (1908). The Probable Error of a Mean. *Biometrika*, 6(1), 1-25.
- Gupta & Kundu. (1999). Generalisasi Exponential Distributions. *Austral & Zealand J. Statist*, 2(41), 173-188.
- Karjono, A. & Wijaya. (2017). Analisis Pengaruh Roe, Der dan Tato Terhadap Harga Saham Pada Perusahaan Manufaktur Sektor Industri Barang Konsumsi yang Terdaftar di Bursa Efek Indonesia Periode 2012–2015. *ESENSI*. 20(2).
- Kissell, R., & Poserina, J. (2017). *Advanced Math and Statistics, Chapter 4. Optimal Sports Math, Statistics, and Fantasy*. Elsevier.

- Kolmogorov, A. N. (1933). Sulla Determinazione Empirica di Une Legge di Distribuzione. *Giornale dell'Intituo Italiano degli Attuari*, 4, 83-91.
- Law, A.M. & Kelton W.D. (1991). *Simulation Modeling and Analysis*. McGraw- Hill.
- Lukiastuti, F. & Hamdani, M. (2012). *Statistika Non Parametris*. Yogyakarta: CAPS.
- Mbah, A.K. & Paothong, A. (2014). Shapiro-Francia Test Compared to Other Normality Test Using Expected pValue. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 85(15), 3002-3016.
- Nosakhare, U. H., Bright, A. F. (2017). Evaluating of Techniques for Univariate Normality Test using Monte Carlo Simulation. *American Journal of Theoretical and Applied Statistic*, 6(5-1), 51-61.
- Poletiek, F. H. (2013). *Hypothesis-Testing Behaviour*. Psychology Press.
- Purwanto. (2011). *Statistik untuk Penelitian*. Yogyakarta: Pustaka Pelajar.
- Putri, R. D. (2020). *Perbandingan Kekuatan Uji Metode Kolmogorov-Smirnov Anderson-Darling dan Shapiro-Wilk untuk Menguji Normalitas Data*. Yogyakarta: Universitas Sanata Dharma.
- Razali, N.M. & Wah, Y.B. (2011). Power Comparision of Shapiro-Wilk, Kolmogorov-Smirnov, Lilliefors, and Anderson-Darling tests. *Journal of Statistical modeling and Analytics* 2(1), 21-33.
- Sauddin, A. (2014). Pengenalan R Programming (Bagian I). *Matematika dan Statistika serta Aplikasinya*, 2(2), 50-59.
- Sebayang, M. (2004). *Probabilitas dan Statistik dalam Ilmu Rekayasa*. Pekanbaru: Teknik Sipil FT UR.
- Shapiro, S. S. & Wilk, M.B. (1965). An Analysis of Variance Test for Normality (Complete Samples). *Biometrika*, 52(3/4), 591—611.
- Sintia I., Pasarella, M.D., & Nohe, D.A. (2022). Perbandingan Tingkat Konsistensi Uji Distribusi Normalitas Pada Kasus Tingkat Pengangguran di Jawa. *Prosiding Seminar Nasional Matematika, Statistika, dan Aplikasinya Terbitan II, Samarinda, Indonesia*, 322-333.
- Stephens, M. A. (1974). EDF Statistics for Goodness of Fit and Some Comparisons. *Journal of The American Statistical Association*, 69, 730-737.
- Taeger, D., & Kuhnt, S. (2014). *Statistical Hypothesis Testing with SAS and R*. Wiley Online Library.
- Walpole, R. E., Myers, R. H., Myers, S. L., & Ye, K. (2011). *Probability and Statistics for Engineers and Scientists (9th ed.)*. United State of America: Prentice Hall.
- Wirawan, Nata. (2016). *Statistika Ekonomi dan Bisnis (Statistika Deskriptif), Edisi 4*. Bali: Keraras Emas Denpasar.
- Yam, J.H. (2020). Ambiguitas Statistika Deskriptif & Statistika Inferensial. *Pelita : Jurnal Penelitian dan Karya Ilmiah*, 20(2), 117-124.
- Zammaduita, A. (2013). *Perbandingan Uji Kenormalan pada Kategori Fungsi Distribusi Empiris menggunakan Metode Simulasi Monte Carlo*. Surakarta: Universitas Sebelas Maret.