



Small Area Estimation Jumlah Penderita Penyakit TBC di Kabupaten Lombok Timur Menggunakan Metode Empirical Bayes

Muslimatun Toyyibah^{a,*}, Desy Komalasari^b, Nurul Fitriyani^c

^a Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Mataram, Jl. Majapahit No. 62, Mataram, 83125, Indonesia. Email: muslimah94@yahoo.com

^b Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Mataram, Jl. Majapahit No. 62, Mataram, 83125, Indonesia. Email: desykomalasari@unram.ac.id

^c Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Mataram, Jl. Majapahit No. 62, Mataram, 83125, Indonesia. Email: nurulfitriyani@unram.ac.id

ABSTRACT

Empirical Bayes is one of small area estimation method that can be used to predict small area parameters. The small area is defined as a subpopulation of small sample sizes. Empirical Bayes is suitable for use in counted data with Poisson-Gamma model. The purpose of this research was to determine the sub-districts that have the highest risk in the number of people with TBC disease in East Lombok Regency. Based on the results, the analysis showed that sub-districts with the highest risk were Sukamulia Sub-district with 1.65543 value of relative risk in 2014, Sambelia Sub-district with 1.80396 value of relative risk in 2015, and Sambelia Sub-district with 4.12718 values of relative risk in 2016.

Keywords: Empirical Bayes, Poisson-Gamma Model, Relative Risk.

1. Pendahuluan

Small Area Estimation (SAE) merupakan suatu teknik statistik untuk menduga parameter pada suatu wilayah dengan ukuran sampel kecil. Salah satu penerapan SAE untuk data cacahan adalah pada penyebaran penyakit. Metode yang cocok untuk data cacahan adalah metode *empirical Bayes*. Kelebihan metode ini dibandingkan dengan metode *hierarchical Bayes*, yaitu lebih mudah dalam pendugaan parameter. Selain itu, metode *empirical Bayes* mampu menampung informasi antar area, atau dengan kata lain dapat mereduksi jumlah kuadrat tengah galat (*mean square error*) dan menghasilkan penduga resiko relatif yang lebih baik (Rao, 2003).

Penduga resiko relatif sederhana adalah *standardized mortality ratio* (SMR) sebagai penduga langsung, yang diperoleh dari asumsi bahwa banyaknya pengamatan suatu

kasus menyebar Poisson, hal ini dikarenakan jumlah penderita penyakit merupakan variabel respon dimana variabel respon tersebut merupakan data hitung dan peluang terjadinya kasus penyakit sangat kecil. Pada distribusi Poisson terdapat asumsi bahwa dalam variabel respon harus terjadi equidispersi (rata-rata sama dengan varian), namun yang sering terjadi adalah variabel respon mengalami overdispersi (rata-rata lebih kecil dari varian). Overdispersi ini juga lebih sering terjadi pada kondisi data yang dikumpulkan dari area-area dengan varian yang berbeda khususnya dari luas area, jumlah penduduknya, serta berbagai faktor lainnya. Oleh karenanya, distribusi ini kurang tepat digunakan karena dapat menghasilkan simpangan baku yang bias.

Masalah overdispersi dapat diatasi dengan menggunakan pendekatan model Poisson-Gamma. Model ini telah dikenal luas untuk menangani pengaruh acak dengan overdispersi secara lebih baik dibandingkan

* Corresponding author. muslimah94@yahoo.com

pendekatan/ distribusi lain (Hadi dan Notodiputro, 2008). Pendekatan/ distribusi lain tersebut diantaranya Poisson Lognormal dan Poisson *Mixture Model*. Pada penelitian, digunakan metode *empirical Bayes* dengan model Poisson-Gamma untuk menduga penderita TBC di Kabupaten Lombok Timur.

2. Small Area Estimation (SAE)

SAE merupakan suatu teknik statistik yang digunakan untuk menduga parameter-parameter area kecil. Secara esensial, terdapat dua tipe model pada SAE, yakni model berbasis area level dan model berbasis unit level. Pada model area kecil berbasis area, data pendukung yang tersedia hanya sampai level area. Model level area menghubungkan penduga langsung area kecil dengan data pendukung dari domain lain untuk setiap area. Parameter area kecil yang ingin diamati adalah θ_i . Model linear yang menjelaskan hubungan tersebut adalah (Rao, 2003):

$$\theta_i = x_i^T \beta + z_i v_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2.1)$$

Dalam membuat kesimpulan tentang populasi, diasumsikan bahwa nilai penduga langsung $\hat{\theta}_i$ diketahui maka dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$\hat{\theta}_i = \theta_i + e_i \quad (2.2)$$

dengan e_i merupakan *sampling error* yang berdistribusi normal.

Model area kecil untuk level area terdiri dari dua tingkat komponen model yaitu, komponen model penduga tidak langsung sesuai dengan persamaan (2.1) dan model penduga langsung sesuai dengan persamaan (2.2). Model pada persamaan (2.1) dan (2.2) jika digabungkan membentuk persamaan sebagai berikut.

$$\hat{\theta}_i = x_i^T \beta + z_i v_i + e_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2.3)$$

3. Standardized Mortality Ratio (SMR)

SMR merupakan penduga langsung yang paling sederhana untuk resiko relatif pada penyebaran penyakit pada SAE (Rao, 2003). SMR berguna dalam mengetahui sebaran geografis suatu penyakit. SMR ini diperoleh dari asumsi umum penyebaran penyakit bahwa banyaknya pengamatan suatu kasus yaitu, $y_i | \theta_i \sim \text{Poisson}(e_i \theta_i)$, dengan e_i adalah nilai harapan banyaknya suatu kasus pada

area ke $-i$ dan θ_i adalah resiko relatif area ke $-i$ yang tidak diketahui.

$$e_i = n_i \left(\frac{\sum_{i=1}^m y_i}{\sum_{i=1}^m n_i} \right) \quad (2.4)$$

dengan,

y_i = jumlah pengamatan (penderita) penyakit TBC pada kecamatan ke $-i$.

n_i = banyaknya penduduk pada kecamatan ke $-i$.

m = jumlah kecamatan.

Selanjutnya, dengan memaksimumkan fungsi peluangnya diperoleh penduga SMR, sebagai berikut.

$$\hat{\theta}_i = \frac{y_i}{e_i} \quad (2.5)$$

4. Metode Empirical Bayes

Metode *empirical Bayes* merupakan metode yang cocok digunakan dalam menangani data biner dan data cacahan pada SAE. Secara ringkas, metode *empirical Bayes* pada SAE (Rao, 2003):

1. Mendapatkan fungsi kepadatan peluang akhir (*posterior*) dari parameter area kecil yang menjadi perhatian;
2. Menduga parameter model dari fungsi kepadatan peluang marginal; dan
3. Menggunakan fungsi kepekatan peluang *posterior* dugaan untuk membuat inferensi parameter area kecil yang menjadi perhatian.

5. Model Poisson-Gamma

Dalam model Poisson-Gamma diperoleh dua tahap yaitu pertama, diasumsikan bahwa $y_i | \theta_i \sim \text{Poisson}(e_i \theta_i)$. Tahap kedua diasumsikan bahwa $\theta_i \sim \text{Gamma}(\beta, \alpha)$ dimana sebagai *prior* dengan rata-rata β/α dan varian β/α^2 maka diperoleh (Rao, 2003).

$$f(y_i, \theta_i) = \frac{\alpha^\alpha}{\Gamma(\alpha)} e^{-\alpha \theta_i} \theta_i^{\alpha-1}, \quad y_i = 0, 1, \dots, \theta_i > 0 \quad (2.6)$$

dan

$$E(\theta_i) = \frac{\beta}{\alpha} = \mu, \quad V(\theta_i) = \frac{\beta}{\alpha^2} \quad (2.7)$$

dengancatatan bahwa:

$$\theta_i | y_i, \alpha, \beta \sim \text{Gamma}(y_i + \beta, e_i + \alpha)$$

Berikut ini merupakan penduga bayes bagi θ_i dan varian *posterior* bagi θ_i diperoleh dari persamaan (2.7) dengan mengganti α ke $e_i + \alpha$ dan β ke $y_i + \alpha$ adalah sebagai berikut.

$$\hat{\theta}_i^{EB}(\beta, \alpha) = E(\theta_i | y_i, \beta, \alpha) = \frac{(y_i + \beta)}{(e_i + \alpha)} \quad (2.8)$$

dan

$$V(\theta_i | y_i, \beta, \alpha) = g_i(y_i, \beta, \alpha) = \frac{(y_i + \beta)}{(e_i + \alpha)^2} \quad (2.9)$$

Selanjutnya, penduga *empirical Bayes* bagi θ_i adalah sebagai berikut.

$$\hat{\theta}_i^{EB} = \hat{\gamma}_i \hat{\theta}_i + (1 - \hat{\gamma}_i) \hat{\mu}_i \quad (2.10)$$

dengan,

$$\hat{\gamma}_i = \frac{e_i}{(e_i + \hat{\alpha})}$$

6. Metodologi

Jenis data yang digunakan dalam penelitian ini data kuantitatif. Data kuantitatif adalah data yang bias dihitung atau diukur dengan angka. Data yang digunakan adalah data sekunder, yaitu data yang diperoleh dari Dinas Kesehatan Kabupaten Lombok Timur Tahun 2014-2016, mengenai penyakit TBC untuk seluruh kecamatan yang ada di Kabupaten Lombok Timur, dimana data penyakit TBC yang digunakan adalah data *suspect* TBC.

Langkah-langkah *Small Area Estimation* jumlah penderita penyakit TBC di Kabupaten Lombok Timur menggunakan metode *empirical Bayes* antara lain sebagai berikut.

1. Pendugaan langsung menggunakan metode *Standardized Mortality ratio* (SMR).

- (a) Ditentukan e_i sebagai nilai harapan banyaknya suatu kasus pada kecamatan ke $-i$ dengan rumus pada persamaan (2.4).
 - (b) Ditentukan penduga SMR untuk semua kecamatan di Kabupaten Lombok Timur menggunakan rumus pada persamaan (2.5).
2. Pendugaan tidak langsung menggunakan metode *empirical Bayes* dengan model Poisson-Gamma.
 - (a) Ditentukan parameter $\hat{\beta}$ dan $\hat{\alpha}$ untuk semua kecamatan di Kabupaten Lombok Timur.
 - (b) Ditentukan $\hat{\mu}_i$ sebagai nilai harapan resiko relatif ke $-i$ untuk semua kecamatan di Kabupaten Lombok Timur.
 - (c) Ditentukan penduga *empirical Bayes* untuk semua kecamatan di Kabupaten Lombok Timur.
 - (d) Menarik kesimpulan, ditunjukkan hasil SAE menggunakan metode *empirical Bayes* dengan model Poisson-Gamma.

7. Hasil dan Pembahasan

Untuk menentukan penduga langsung, terlebih dahulu ditentukan nilai harapan banyak suatu kasus pada area ke $-i$ dengan rumus pada persamaan (2.5). Pendugaan langsung digunakan untuk menentukan penduga tidak langsung menggunakan metode penduga *empirical Bayes* dengan model Poisson-Gamma. Terlebih dahulu dilakukan pendugaan parameter *prior* menggunakan persamaan berikut.

$$\hat{\alpha} = \frac{m_1}{(m_2 - m_1 - m_1)} e_i$$

dan

$$\hat{\beta} = \frac{\left(\frac{\sum_{i=1} y_i}{n} \right)^2}{\left[\left(\frac{\sum_{i=1} y_i^2}{n} \right) - \left(\frac{\sum_{i=1} y_i}{n} \right)^2 - \left(\frac{\sum_{i=1} y_i}{n} \right) \right]}$$

Setelah penduga parameter ditentukan, untuk Kecamatan Keruak, maka diperoleh nilai harapan resiko relatif sesuai dengan persamaan berikut.

$$E(\theta_i) = \frac{\beta}{\alpha} = \mu, \quad V(\theta_i) = \frac{\beta}{\alpha^2}$$

Nilai pendugaan tidak langsung kemudian ditentukan dengan menggunakan rumus pada persamaan (2.10). Pada Tabel 1 berikut diberikan rekapitulasi penduga tidak langsung menggunakan metode *empirical Bayes* dengan model Poisson-Gamma.

Tabel 1 – Penduga *Empirical Bayes* dengan Model Poisson-Gamma

Kecamatan	$\hat{\theta}_i^{EB}$ selama 3 Tahun		
	2014	2015	2016
Keruak	0.9954737	1.4127939	0.8846023
Jerowaru	0.9929200	0.9621239	1.1543840
Sakra	0.9993889	0.8985118	0.5768881
Sakra Barat	0.9983689	0.6708415	0.9997575
Sakra Timur	0.9989338	0.7030272	0.9147953
Terara	1.0161701	0.5540724	0.4398388
Montong Gading	0.9840695	0.8397881	1.2754160
Sikur	1.0065076	1.6749178	1.0303371
Masbagik	1.0019871	1.0787080	0.7258210
Pringgasele	0.6071306	0.7066346	0.7672614
Sukamulia	1.6553952	1.1362765	1.3452365
Suralaga	0.9919731	1.0101698	0.4165939
Selong	0.9906570	0.7506417	1.1139285
Labuan Haji	1.0023728	0.9935568	1.7153684
Pringgabaya	1.0043125	1.2315533	1.1047603
Suela	0.9987475	0.6586192	0.5096292
Aikmel	1.0014671	1.0865984	0.9367257
Wanasaba	1.0069112	1.0027910	0.6349075
Semalun	1.0035711	0.3366547	0.8919953

Kecamatan	$\hat{\theta}_i^{EB}$ selama 3 Tahun		
	2014	2015	2016
Sambelia	0.9939504	1.8014796	4.1271819

Tabel 4.1 menunjukkan nilai resiko relatif setiap kecamatan selama tahun 2014-2016 di Kabupaten Lombok Timur. Hasil perhitungan pada Tabel 4.1 menunjukkan selama tahun 2014-2016, terdapat 9 kecamatan yang memiliki resiko tinggi, dengan Kecamatan Sukamulia merupakan kecamatan dengan resiko tertinggi dengan resiko relatif sebesar 1.6553952 pada tahun 2014, Kecamatan Sambelia dengan resiko tertinggi dengan resiko relatif sebesar 1.8014796 pada tahun 2015, dan Kecamatan Sambelia merupakan kecamatan yang tertinggi dengan resiko relatif sebesar 1.6983743 pada tahun 2016.

8. Kesimpulan

Kebutuhan informasi yang reliabel mengenai kecamatan dengan resiko tertinggi terjangkau suatu penyakit menjadi keharusan. Informasi ini akan dijadikan rujukan bagi pemerintah melalui dinas kesehatan dalam upaya menanggulangi penyebaran penyakit di Kabupaten Lombok Timur khususnya.

DAFTAR PUSTAKA

- Rao, J.N.K.(2003). *Small Area Estimation*, Canada: John Wiley & Sons Inc.
- Hadi, F. A., Nusyirwan., dan Notodiputro, K. A. (2008). Penduga Maksimum Likelihood untuk Parameter Dispersi Model Poisson-Gamma dalam Konteks Pendugaan Area Kecil, *Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika*.