



# The Generalized Petviashvili Iteration Method for Determined Stationary Waves Solutions of Nonlinear Schrödinger Equations with Potential Function $V(x)$

*Nuzla Af'idatur Robbaniyyah<sup>a\*</sup>, Irwan<sup>b</sup>*

<sup>a</sup>Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Mataram, Jl. Majapahit No. 62, Mataram, 83125, Indonesia, Email: [nuzla@unram.ac.id](mailto:nuzla@unram.ac.id)

<sup>b</sup>Prodi Tadris Fisika, Fakultas Tarbiyah dan Keguruan, Universitas Islam Negeri Mataram, Jl. Gajah Mada N0.100, Mataram, 83116, Indonesia, Email: [irwan@uinmataram.ac.id](mailto:irwan@uinmataram.ac.id)

## ABSTRACT

Partial differential equations are widely used in physics problems. One example of this problem is the nonlinear wave equation. Nonlinear wave applications, including water waves, acoustic or sound waves, light waves, elastic waves commonly found in spring systems, nonlinear Schrödinger type waves, etc. In general, solutions to partial differential equations can be solved analytically. However, most solutions of nonlinear wave equations are difficult to determine analytically. Therefore, a numerical approach is needed especially to determine the solution of nonlinear Schrödinger (NLS) type equations. This research discusses a numerical method for determining stationary waves as a solution to the Nonlinear Schrödinger equation (NLS). One of the numerical methods that can be used to determine the solution of NLS-type equations is the Petviashvili iteration method. In the case study, the NLS equation has been generated by the Bose-Einstein condensation theory which contains a potential function  $V(x)$ . To overcome this problem, we developed the Petviashvili iteration method so that it can be used to determine the expected stationary solution. The most interesting result of this research is that by modifying the Petviashvili iteration method, we can easily determine the stationary wave solution for nonlinear Schrodinger type equations that contain potential functions in the Bose-Einstein  $V(x)$  condensation theory.

Keywords: modification of the Petviashvili iteration method; stationary waves; Nonlinear Schrödinger equation; Bose-Einstein condensation; potential function.

Diserahkan: 27-09-2022; Diterima: 12-12-2022;

Doi: <https://doi.org/10.29303/emj.v5i2.146>

## 1. Pendahuluan

\* Corresponding author.

Alamat e-mail: [nuzla@unram.ac.id](mailto:nuzla@unram.ac.id)

Secara umum persamaan diferensial terbagi menjadi dua macam, yaitu persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial. Pembagian tersebut didasarkan pada banyaknya variabel bebas yang terdapat dalam persamaan. Persamaan diferensial biasa merupakan suatu persamaan yang melibatkan fungsi satu peubah dan turunannya. Sedangkan, persamaan diferensial parsial merupakan suatu persamaan yang melibatkan fungsi dua peubah atau lebih dan turunannya (Achdou, Buera, Lions, & Moll, 2014; Zada & Aziz, 2022)

Persamaan diferensial parsial banyak digunakan dalam permasalahan bidang fisika. Salah satu contoh dari permasalahan tersebut adalah persamaan gelombang nonlinear. Aplikasi gelombang nonlinear, meliputi gelombang air, gelombang akustik atau gelombang bunyi, gelombang cahaya, gelombang elastis yang biasa terdapat dalam sistem pegas, gelombang yang bertipe Schrödinger nonlinear, dan sebagainya. Sebagian besar aplikasi gelombang nonlinear mempunyai solusi stasioner. Solusi gelombang stasioner merupakan penyelesaian dari persamaan gelombang yang memiliki kecepatan konstan ketika merambat pada suatu medium, tidak mengalami perubahan bentuk dan amplitudo. Salah satu contoh gelombang stasioner adalah persamaan gelombang yang bertipe Schrödinger nonlinear. Persamaan tersebut mampu mendeskripsikan fenomena pada media nonlinear dengan penyebaran yang kuat (Nisar et al., 2022). Persamaan tersebut tergolong gelombang soliter, yaitu sebuah paket gelombang yang memiliki sifat terlokalisasi mempertahankan bentuknya sementara gelombang tersebut merambat tanpa mengalami perubahan bentuk dengan kecepatan konstan. Soliton merupakan salah satu jenis khusus dari gelombang soliter yang diperoleh dari persamaan diferensial parsial nonlinear (Rezazadeh et al., 2021). Ciri khas soliton adalah dapat bertumbukan dengan soliton lain, kemudian kembali muncul dengan bentuk yang sama dan kecepatan konstan seperti semula (Serkin & Hasegawa, 2000). Perilaku gelombang ini diamati pertama kali oleh J. Scott Russel dari Edinburgh Glasgow Canal pada tahun 1834. Penjalaran gelombang soliter disebabkan oleh efek nonlinear dan efek dispersif pada medium (Michel Remoissenet, 2010). J. Scott Russel melaporkan temuannya ke Asosiasi British pada tahun 1844 dengan artikel ilmiah yang berjudul "Report on Waves". Di dalam artikel ilmiah tersebut, disimpulkan bahwa gelombang soliton bukan merupakan gelombang periodik, tetapi merupakan gelombang dengan penyebaran tunggal, simetris, dan tidak mengalami perubahan bentuk (Rezazadeh et al., 2021).

Secara umum, solusi persamaan diferensial parsial dapat diselesaikan secara analitik. Akan tetapi, sebagian besar solusi persamaan gelombang nonlinear sulit ditentukan secara analitik. Oleh karena itu, diperlukan suatu pendekatan numerik untuk menentukan solusi dari persamaan tersebut. Salah satu metode numerik yang dimanfaatkan untuk mendapatkan solusi di atas adalah metode iterasi Petviashvili (Yang & Lakoba, 2007). Metode ini diperkenalkan oleh V. I. Petviashvili pada tahun 1976 berdasarkan persamaan Kadomtsev-Petviashvili. Pendekatan metode numerik ini memiliki keunggulan, yaitu dapat diterapkan pada berbagai dimensi spasial persamaan dan akurasi solusi persamaannya merupakan solusi eksponensial (Pelinovsky & Stepanyants, 2004).

Sejumlah penelitian melaporkan berbagai ekstensi dari metode iterasi Petviashvili dalam bentuk persamaan yang berbeda menggunakan hukum pangkat nonlinear. Oleh karena itu, metode Petviashvili dimodifikasi mengikuti persamaan gelombang kondensasi Bose-Einstein dan perambatan cahaya pada kisi fotonik nonlinear. Berawal dari analisis tersebut, Lakoba dan Yang tahun 2007 mengembangkan metode iterasi Petviashvili untuk menentukan berbagai gelombang stasioner yang nonlinear (Lakoba & Yang, 2007). Dalam penelitian ini dilakukan pengembangan Metode Iterasi Petviashvili Untuk Menentukan Gelombang Stasioner Dari Persamaan Bertipe Schrödinger Nonlinear sebagai salah satu cara untuk menentukan pendekatan solusi numerik yang lebih baik.

## 2. Metode Iterasi Petviashvili

Penerapan metode iterasi Petviashvili dalam persamaan diferensial dimanfaatkan untuk mencari solusi stasioner gelombang nonlinear secara numeric (Álvarez & Durán, 2014; Weiss, 2012). Metode tersebut memenuhi hukum pangkat nonlinear sebagai berikut.

$$-Mu + u^p = 0, \quad (1)$$

dengan  $u$  adalah nilai eksak gelombang soliter,  $M$  adalah definit positif dan operator *self-adjoint*, dan  $p$  adalah konstanta. Hukum pangkat nonlinear merupakan salah satu kelas persamaan gelombang nonlinear yang dikenal untuk menyelesaikan solusi fundamental gelombang soliter pada persamaan gelombang nonlinear.

Algoritma iterasi Petviashvili dapat ditunjukkan melalui persamaan gelombang nonlinear Schrödinger

1-D dengan memenuhi hukum pangkat nonlinear sebagai berikut.

$$iU_t + \nabla^2 U + |U|^{p-1}U = 0, U(|x| \rightarrow \infty) \rightarrow 0, \quad (2)$$

dengan  $p > 2$  dan  $\nabla^2$  adalah operator Laplace multi dimensi spasial. Persamaan (2) memiliki solusi coba sebagai berikut.

$$U(\mathbf{x}, t) = e^{i\mu t} u(\mathbf{x}), \quad (3)$$

dengan  $u(\mathbf{x}) > 0$  dan  $\mu$  merupakan konstanta rambat gelombang yang juga bernilai positif. Persamaan (3) disubstitusikan ke dalam persamaan (2), sehingga diperoleh

$$\nabla^2 u + u^p = \mu u. \quad (4)$$

Berdasarkan persamaan (1), persamaan (4) dapat dituliskan sebagai

$$Mu = u^p$$

atau

$$u = M^{-1}u^p, \quad (5)$$

dengan

$$M = \mu - \nabla^2, \quad (6)$$

(Yang & Lakoba, 2007)

Jika dilakukan iterasi pada persamaan (5), maka akan diperoleh solusi yang divergen menuju nol atau divergen menuju tak hingga. Dengan demikian, solusi metode iterasi Petviashvili perlu dikontrol menggunakan faktor stabilisasi  $S_n$  agar solusi dapat konvergen, maka diperoleh persamaan sebagai berikut.

$$u_{n+1} = M^{-1}u_n^p S_n^\gamma \quad (7)$$

dengan

$$S_n = \frac{\langle u_n, M u_n \rangle}{\langle u_n, u_n^p \rangle}.$$

Persamaan (7) dapat pula dituliskan ke dalam bentuk

$$u_{n+1} = M^{-1}u_n^p \left( \frac{\langle u_n, u_n^p \rangle}{\langle u_n, M u_n \rangle} \right)^{-\gamma}, \quad (8)$$

$\gamma$  adalah konstanta yang ditentukan secara empiris oleh Petviashvili sebagai berikut.

$$\gamma = \frac{p}{p-1}. \quad (9)$$

Besar kecilnya nilai  $\gamma$  memengaruhi kekonvergenan solusi (Pelinovsky dan Stepanyants, 2004).  $u_n$  dalam persamaan (7) merupakan solusi numerik metode iterasi Petviashvili pada saat iterasi ke- $n$ .

Operator  $M^{-1}$  dan  $M$  ditransformasikan ke dalam transformasi Fourier pada saat dilakukan iterasi persamaan (7), dengan  $M$  didefinisikan pada persamaan (6). Penerepan operator  $M^{-1}$  dan  $M$  pada transformasi Fourier adalah

$$M^{-1}f(x) = F^{-1} \left[ \frac{F[f]}{F[M]} \right],$$

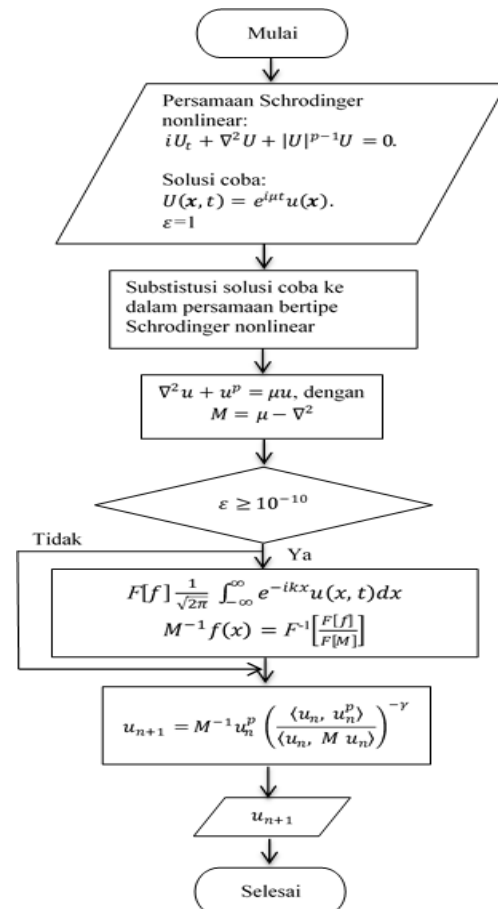
dengan

$$F[f] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x, t) dx \equiv \hat{f}(k),$$

$$F^{-1}[\hat{f}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \hat{f}(k) dk,$$

$F[M]$  merupakan simbol transformasi Fourier pada operator  $M$ . Salah satu contoh transformasi operator dalam persamaan (6) adalah  $F[M] = \mu + k^2$  (Yang & Lakoba, 2007)

Di bawah ini merupakan diagram alir (*flowchart*) dari penerapan metode iterasi Petviashvili.



Gambar 1. *Flowchart* metode iterasi Petviashvili

### 3. Hasil dan Pembahasan

#### 3.1 Pengembangan Metode Iterasi Petviashvili

Pada bagian ini ditunjukkan pengembangan dari skema asli metode iterasi Petviashvili menjadi skema numeric baru yang masih ekuivalen dengan bentuk asalnya. Terdapat beberapa langkah analisis yang dilakukan untuk mendapatkan skema pengembangan metode iterasi Petviashvili. Dengan demikian, skema tersebut dapat diaplikasikan untuk persamaan yang bertipe nonlinear Schrödinger yang memuat fungsi potensial.

Pengembangan metode iterasi Petviashvili merupakan salah satu metode numerik untuk menentukan gelombang stasioner persamaan bertipe nonlinear Schrödinger. Untuk memperoleh gelombang stasioner yang konvergen, modifikasi metode iterasi Petviashvili bergantung pada nilai kekonvergenan  $\gamma$  seperti pada persamaan (9). Nilai  $\gamma$  pada persamaan (9) ditentukan secara empirik oleh V. I. Petviashvili, sedangkan pada modifikasi metode tersebut besarnya nilai  $\gamma$  dianalisis sesuai kondisi skema pengembangan metode iterasi Petviashvili (Cho, 2015).

Untuk memodifikasi persamaan (8), persamaan tersebut disusun kembali menjadi bentuk yang berbeda. Dituliskan persamaan stasioner soliton pada persamaan (1) sebagai berikut.

$$L_0 u = -M + u^p = 0, \quad (10)$$

dengan didefinisikan operator  $L$  adalah

$$L = -M + pu^{p-1}. \quad (11)$$

$M$  adalah operator yang didefinisikan pada persamaan (6), dan  $u$  adalah solusi eksak gelombang soliton.

#### 3.2 Bentuk Ekuivalen Metode Dasar Petviashvili

Misalkan  $p$  pada metode iterasi Petviashvili dasar persamaan (8) bernilai 3, sehingga diperoleh persamaan berikut.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= S_n^\gamma M^{-1} u_n^3 \\ &= \left( \frac{\langle u_n, Mu_n \rangle}{\langle u_n, u_n^3 \rangle} \right)^\gamma M^{-1} u_n^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= M^{-1} u_n^3 \left( \frac{\langle u_n, u_n^3 \rangle}{\langle u_n, Mu_n \rangle} \right)^{-\gamma} \\ u_{n+1} - u_n &= (u_n - u_n + M^{-1} u_n^3) \left( \frac{\langle u_n, Mu_n - Mu_n + u_n^3 \rangle}{\langle u_n, Mu_n \rangle} \right)^{-\gamma} - u_n \\ &= (u_n - M^{-1} Mu_n + M^{-1} u_n^3) \\ &\quad \left( \frac{\langle u_n, Mu_n \rangle + \langle u_n, -Mu_n + u_n^3 \rangle}{\langle u_n, Mu_n \rangle} \right)^{-\gamma} \\ &\quad - u_n \\ &= (u_n + M^{-1} (-Mu_n + u_n^3)) \\ &\quad \left( 1 + \frac{\langle u_n, -Mu_n + u_n^3 \rangle}{\langle u_n, Mu_n \rangle} \right)^{-\gamma} - u_n \\ &= (u_n + M^{-1} (L_0 u)_n) \\ &\quad \left( 1 + \frac{\langle u_n, (L_0 u)_n \rangle}{\langle u_n, Mu_n \rangle} \right)^{-\gamma} - u_n \quad (12) \end{aligned}$$

dengan

$$(L_0 u)_n = -Mu_n + u_n^3.$$

Agar solusi numerik  $u_n$  pada persamaan (12) mendekati solusi eksak  $u$ , maka dilakukan linearisasi dengan mensubstitusikan persamaan (13) ke dalam persamaan (12).

$$u_n = u + \varepsilon \tilde{u}_n, \quad (13)$$

dengan

$$\varepsilon \ll 1 \text{ dan } |\tilde{u}_n| \ll |u|,$$

dan mengabaikan  $O((\varepsilon \tilde{u}_n)^2)$  dan orde yang lebih tinggi. Hasil linearisasi persamaan (12) dituliskan menjadi

(i) Ruas kiri (*left hand side*)

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= u + \varepsilon \tilde{u}_{n+1} - u - \varepsilon \tilde{u}_n \\ &= \varepsilon (\tilde{u}_{n+1} - \tilde{u}_n). \end{aligned}$$

(ii) Ruas kanan (*right hand side*)

$$(u_n + M^{-1} (L_0 u)_n) \left( 1 + \frac{\langle u_n, (L_0 u)_n \rangle}{\langle u_n, Mu_n \rangle} \right)^{-\gamma} - u_n,$$

dengan

$$\begin{aligned} (L_0 u)_n &= -Mu_n + u_n^3 \\ &= -M(u + \varepsilon \tilde{u}_n) + (u - \varepsilon \tilde{u}_n)^3 \\ &= -Mu - \varepsilon M \tilde{u}_n + u^3 + 3u^2 \varepsilon \tilde{u}_n + 3u(\varepsilon \tilde{u}_n)^2 + (\varepsilon \tilde{u}_n)^3 \\ &= -Mu - \varepsilon M \tilde{u}_n + u^3 + 3u^2 \varepsilon \tilde{u}_n \\ &= -Mu + u^3 - \varepsilon M \tilde{u}_n + 3u^2 \varepsilon \tilde{u}_n \\ &= -Mu + u^3 + \varepsilon \tilde{u}_n (-M + 3u^2) \\ &= L_0 u + \varepsilon L \tilde{u}_n, \end{aligned}$$

di mana  $L$  merupakan operator linearisasi pada persamaan (10)

yang dituliskan sebagai

$$L = -M + 3u^2.$$

Untuk memperoleh bagian yang linear digunakan ekspansi deret Taylor dengan hampiran di sekitar titik  $x_0 = 0$ . Misalkan

$$\left(1 + \frac{\langle u_n, (L_0 u)_n \rangle}{\langle u_n, M u_n \rangle}\right)^{-\gamma} = (1 + x)^{-\gamma},$$

maka diperoleh

$$\begin{aligned} (1 + x)^{-\gamma} &= (1 + x_0)^{-\gamma} - \gamma(x - x_0)(1 + x_0)^{-\gamma-1} \\ &\quad + \frac{\gamma(\gamma - 1)(x - x_0)^2(1 + x_0)^{-\gamma-2}}{2!} + \dots \\ &\quad - \gamma x, \end{aligned}$$

sehingga dapat dituliskan menjadi

$$(u_n + M^{-1}(L_0 u)_n) \left(1 - \gamma \left(\frac{\langle u_n, (L_0 u)_n \rangle}{\langle u_n, M u_n \rangle}\right)\right) - u_n.$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (13) diperoleh hasil ruas kanan sebagai berikut.

$$\varepsilon M^{-1} L \tilde{u}_n - \gamma \frac{\langle u, \varepsilon L \tilde{u}_n \rangle}{\langle u, M u_n \rangle} u.$$

Dari (i) dan (ii) diperoleh persamaan sebagai berikut.

$$\tilde{u}_{n+1} - \tilde{u}_n = \left(M^{-1} L \tilde{u}_n - \gamma \frac{\langle u, L \tilde{u}_n \rangle}{\langle u, M u \rangle} u\right) \Delta \tau, \quad (13)$$

$$\Delta \tau = 1, \quad (14)$$

dengan  $\tau$  merupakan variabel waktu pembantu nonfisik dan  $L$  merupakan operator yang bekerja pada  $\tilde{u}_n$ , yaitu

$$L \tilde{u}_n \equiv (-M + p u^{p-1}) \tilde{u}_n.$$

Persamaan (12) diinterpretasikan sebagai diskritisasi Euler eksplisit yang linear, yaitu

$$\tilde{u}_\tau = M^{-1} L \tilde{u} - \gamma \frac{\langle u, L \tilde{u} \rangle}{\langle u, M u \rangle} u.$$

Tahap akhir penurunan skema pengembangan metode ini adalah dilakukan delinearisasi, sehingga diperoleh bentuk persamaan

$$\bar{u}_\tau = M^{-1} L_0 \bar{u} - \gamma \frac{\langle u, L \bar{u} \rangle}{\langle u, M \bar{u} \rangle} \bar{u},$$

di mana  $\bar{u}$  menunjukkan nilai pendekatan solusi eksak saat ini. Dengan demikian, diperoleh skema numerik metode iterasi Petviashvili sebagai berikut.

$$u_{n+1} - u_n = \left(M^{-1}(L_0 u)_n - \gamma \frac{\langle u_n, (L_0 u)_n \rangle}{\langle u_n, M u_n \rangle} u_n\right) \Delta \tau. \quad (14)$$

Jika  $\Delta \tau = 1$ , maka skema tersebut ekuivalen dengan metode dasar iterasi Petviashvili pada persamaan (8).

### 3.3 Penentuan Parameter $\gamma$

$\gamma$  merupakan parameter yang sangat berpengaruh dalam kekonvergenan skema numerik (Koleva & Vulkov, 2013). Skema persamaan (14) dikatakan konvergen menuju gelombang soliter  $u$  apabila nilai *error*  $\tilde{u}_n$  menuju nol untuk  $n \rightarrow \infty$ . Untuk memperoleh nilai  $\gamma$  yang optimal untuk persamaan (14) disubstitusikan dekomposisi  $\tilde{u}_n(\mathbf{x})$  ke dalam persamaan (12).

$$\tilde{u}_n(\mathbf{x}) = a_n u(\mathbf{x}) + z_n(\mathbf{x}), \quad (16)$$

di mana  $a_n$  merupakan skalar dan  $z_n(\mathbf{x})$  ortogonal dengan  $Mu$  untuk setiap iterasi dengan operator  $M$ .  $M$  merupakan *self-adjoint operator* dan berlaku

$$\langle z_n, Mu \rangle = 0, \text{ atau } \langle M z_n, u \rangle = 0, \forall n. \quad (17)$$

Dengan menerapkan persamaan (10), (11), dan (14) pada persamaan (1) dan (10), diperoleh persamaan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} L_0 u &= -Mu + u^p = 0 \\ u^p &= Mu. \end{aligned}$$

Didefinisikan operator linear  $L$ , yaitu

$$\begin{aligned} L &= -M + p u^{p-1} \\ Lu &= -Mu + p u^p \\ Lu &= -Mu + p M u \\ Lu &= (p - 1) M u. \end{aligned} \quad (18)$$

Persamaan (18) merupakan bentuk umum persamaan gelombang stasioner dapat dituliskan menjadi

$$M^{-1} L u = (p - 1) u. \quad (19)$$

Dengan demikian,  $u$  disebut dengan fungsi eigen pada operator  $M^{-1} L$ .

Untuk memperoleh nilai  $\gamma$  pada skema modifikasi metode iterasi Petviashvili diasumsikan

$$\langle z_n, Lu \rangle = 0, \text{ atau } \langle L z_n, u \rangle = 0, \forall n. \quad (20)$$

Dengan memanfaatkan persamaan (18) dan (20) ke dalam persamaan (16), diperoleh persamaan di bawah ini.

(iii) Ruas kiri (*left hand side*)

$$\begin{aligned}\tilde{u}_{n+1} - \tilde{u}_n &= a_{n+1}u + z_{n+1} - a_nu - z_n \\ &= (a_{n+1} - a_n)u + (z_{n+1} - z_n)\end{aligned}$$

(iv) Ruas kanan (*right hand side*)

$$\begin{aligned}& \left( M^{-1}L\tilde{u}_n - \gamma \frac{\langle u, L\tilde{u}_n \rangle}{\langle u, Mu \rangle} u \right) \Delta\tau \\ &= \left( M^{-1}L(a_nu + z_n) - \gamma \frac{\langle u, L(a_nu + z_n) \rangle}{\langle u, Mu \rangle} u \right) \Delta\tau \\ &= \left( a_nM^{-1}Lu + M^{-1}Lz_n - \gamma \frac{\langle u, a_nLu + Lz_n \rangle}{\langle u, Mu \rangle} u \right) \Delta\tau \\ &= \left( a_n(p-1)u + M^{-1}Lz_n - \gamma \frac{\langle u, a_nLu \rangle + \langle u, Lz_n \rangle}{\langle u, Mu \rangle} u \right) \Delta\tau \\ &= \left( a_n(p-1)u + M^{-1}Lz_n - \gamma \frac{\langle u, a_nMM^{-1}Lu \rangle}{\langle u, Mu \rangle} u \right) \Delta\tau \\ &= \left( a_n(p-1)u + M^{-1}Lz_n - \gamma \frac{\langle u, a_nM(p-1)u \rangle}{\langle u, Mu \rangle} u \right) \Delta\tau \\ &= a_n(p-1)u\Delta\tau + M^{-1}Lz_n\Delta\tau - \gamma a_n(p-1) \frac{\langle u, Mu \rangle}{\langle u, Mu \rangle} u\Delta\tau \\ &= M^{-1}Lz_n\Delta\tau + a_n(p-1)u\Delta\tau - \gamma a_n(p-1)u\Delta\tau \\ &= M^{-1}Lz_n\Delta\tau + a_nu(p-1)(1-\gamma)\Delta\tau.\end{aligned}$$

Dengan demikian, dari (iii) dan (iv) dapat dituliskan sebagai

$$(a_{n+1} - a_n)u + (z_{n+1} - z_n) = M^{-1}Lz_n\Delta\tau + a_nu(p-1)(1-\gamma)\Delta\tau. \quad (21)$$

Dengan menerapkan hasil kali dalam  $Mu$  terhadap masing-masing ruas persamaan (21) dan memperhatikan asumsi pada persamaan (17) dan (20), diperoleh persamaan sebagai berikut.

(v) Ruas kiri (*left hand side*)

$$\begin{aligned}& \langle Mu, (a_{n+1} - a_n)u + (z_{n+1} - z_n) \rangle \\ &= \langle Mu, (a_{n+1} - a_n)u \rangle + \langle Mu, (z_{n+1} - z_n) \rangle \\ &= \langle Mu, (a_{n+1} - a_n)u \rangle.\end{aligned}$$

(vi) Ruas kanan (*right hand side*)

$$\begin{aligned}& \langle Mu, M^{-1}Lz_n\Delta\tau + a_nu(p-1)(1-\gamma)\Delta\tau \rangle \\ &= \langle Mu, M^{-1}Lz_n\Delta\tau \rangle + \langle Mu, a_nu(p-1)(1-\gamma)\Delta\tau \rangle \\ &= \langle Mu, a_nu(p-1)(1-\gamma)\Delta\tau \rangle,\end{aligned}$$

dari (v) dan (vi) dapat dituliskan menjadi

$$\begin{aligned}\langle Mu, (a_{n+1} - a_n)u \rangle &= \langle Mu, a_nu(p-1)(1-\gamma)\Delta\tau \rangle \\ (a_{n+1} - a_n)\langle Mu, u \rangle &= a_n(p-1)(1-\gamma)\Delta\tau\langle Mu, u \rangle \\ a_{n+1} - a_n &= a_n(p-1)(1-\gamma)\Delta\tau \\ a_{n+1} &= a_n(1 + (p-1)(1-\gamma)\Delta\tau).\end{aligned}$$

Jika

$$\gamma = 1 + \frac{1}{(p-1)\Delta\tau}, \quad (22)$$

maka nilai  $a_{n+1} = 0$ . Nilai  $\gamma$  pada persamaan (22) merupakan nilai yang optimal untuk skema (15). Dengan memanfaatkan nilai  $\gamma$  pada persamaan (22) akan didapatkan solusi gelombang stasioner dengan konvergensi yang cepat dan tidak membutuhkan terlalu banyak iterasi.

### 3.4 Penurunan Algoritma Modifikasi Metode Iterasi Petviashvili

Modifikasi metode iterasi Petviashvili digunakan untuk menentukan gelombang stasioner pada bentuk persamaan sebagai berikut.

$$L_0u \equiv -Mu + F(x, u) = 0, \quad u(|x| \rightarrow \infty) \rightarrow 0, \quad (23)$$

di mana  $F(x, u)$  merupakan fungsi potensial real. Salah satu contoh bentuk persamaan (23) adalah persamaan dari hasil teori kondensasi Bose-Einstein, yaitu persamaan bertipe Schrödinger nonlinear di bawah ini.

$$L_0u \equiv -Mu + V(x)u + u^3 = 0, \quad u(|x| \rightarrow \infty) \rightarrow 0,$$

dengan  $M$  diketahui pada persamaan (6) dan  $V(x)$  adalah fungsi potensial.

Operator linear  $L$  merupakan hasil linearisasi  $L_0u$  yang dituliskan sebagai

$$L = -M + V(x) + 3u^2,$$

dan karena

$$\begin{aligned}L_0u &= -Mu + V(x)u + u^3 \\ 0 &= -(M - V(x))u + u^3 \\ u^3 &= (M - V(x))u \\ u^2 &= M - V(x),\end{aligned}$$

maka

$$\begin{aligned}Lu &= -Mu + V(x)u + 3u^3 \\ &= -(M - V(x))u + 3u^3 \\ &= 2u^3 \\ &= 2(M - V(x))u \\ &\neq kMu,\end{aligned}$$

Dengan  $k$  adalah konstanta. Hasil  $Lu \neq kMu$  tidak memenuhi bentuk (18). Oleh karena itu, diperlukan suatu pendekatan

$$Lu \approx \alpha Nu, \quad (24)$$

dengan  $N$  merupakan operator coba (ansatz) dan  $\alpha$  merupakan konstanta, sehingga skema persamaan (15) dituliskan menjadi

$$u_{n+1} - u_n = \left( N^{-1}(L_0 u)_n - \gamma \frac{\langle u_n, (L_0 u)_n \rangle}{\langle u_n, N u_n \rangle} u_n \right) \Delta \tau, \quad (25)$$

$$\gamma = 1 + \frac{1}{\alpha \Delta \tau}. \quad (26)$$

### 3.5 Penentuan Komponen Operator Coba (Ansatz)

Pada pengembangan metode iterasi Petviashvili diberikan operator coba (ansatz)  $N$  yang dituliskan sebagai

$$N = c - \nabla^2, \quad (27)$$

dimana  $c$  diperoleh dari vektor  $Nu_n$  sejajar dengan vektor  $Lu_n$ , sehingga berlaku persamaan sebagai berikut.

$$\frac{\langle Nu_n, Lu_n \rangle^2}{\langle Nu_n, Nu_n \rangle \langle Lu_n, Lu_n \rangle} = \max.$$

Untuk memperoleh nilai  $N$  yang maksimum, ruas kiri diturunkan terhadap  $c$  dan sama dengan nol, sehingga diperoleh

$$\frac{\langle N_c u_n, Lu_n \rangle \langle Nu_n, Lu_n \rangle}{\langle N_c u_n, Nu_n \rangle \langle Lu_n, Lu_n \rangle} = 0$$

$$\frac{\langle u_n, Lu_n \rangle}{\langle u_n, Nu_n \rangle} = \frac{\langle Nu_n, Lu_n \rangle}{\langle Nu_n, Nu_n \rangle}, \quad (28)$$

dengan  $N_c = \frac{\partial N}{\partial c} = 1$ . Nilai  $c$  pada iterasi ke- $n$  diperoleh dengan mensubstitusikan persamaan (27) ke dalam persamaan (28) sebagai berikut.

$$\frac{\langle u_n, Lu_n \rangle}{\langle u_n, cu_n - \nabla^2 u_n \rangle} = \frac{\langle cu_n - \nabla^2 u_n, Lu_n \rangle}{\langle cu_n - \nabla^2 u_n, cu_n - \nabla^2 u_n \rangle}$$

$$\frac{\langle u_n, Lu_n \rangle}{\langle u_n, cu_n - \nabla^2 u_n \rangle} - \frac{\langle cu_n - \nabla^2 u_n, Lu_n \rangle}{\langle cu_n - \nabla^2 u_n, cu_n - \nabla^2 u_n \rangle} = 0$$

$$\langle u_n, Lu_n \rangle \langle cu_n - \nabla^2 u_n, cu_n - \nabla^2 u_n \rangle - \langle u_n, cu_n - \nabla^2 u_n \rangle \langle cu_n - \nabla^2 u_n, Lu_n \rangle = 0,$$

diperoleh,

$$c_n = \frac{\langle u_n, Lu_n \rangle \langle \nabla^2 u_n, \nabla^2 u_n \rangle - \langle u_n, \nabla^2 u_n \rangle \langle \nabla^2 u_n, Lu_n \rangle}{\langle u_n, Lu_n \rangle \langle u_n, \nabla^2 u_n \rangle - \langle u_n, u_n \rangle \langle \nabla^2 u_n, Lu_n \rangle}. \quad (29)$$

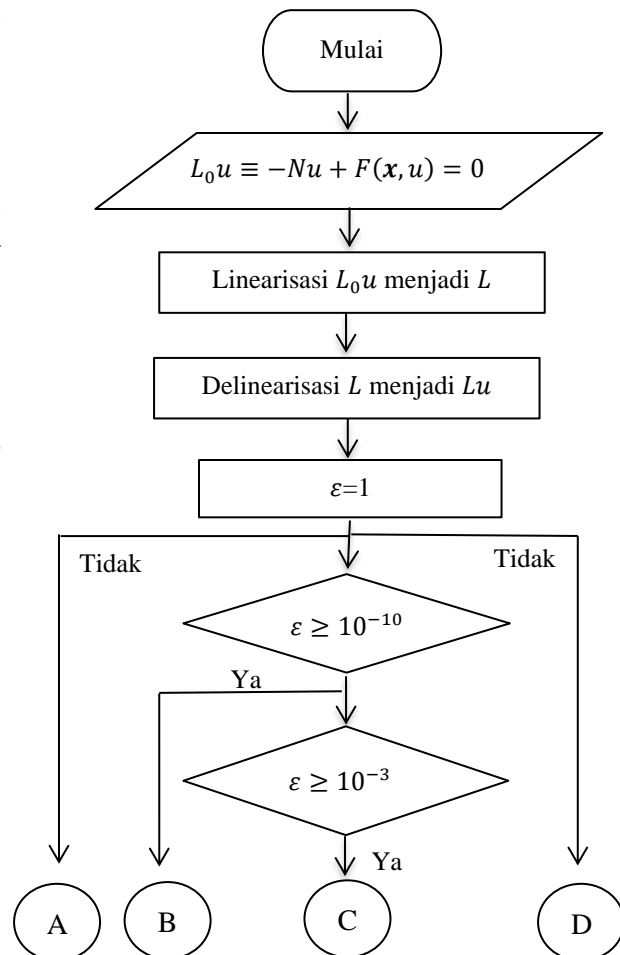
Nilai  $c$  pada persamaan (29) diasumsikan bahwa  $c = \mu$ , sehingga  $N = M$ . Dengan demikian telah diperoleh komponen *ansatz*.

Untuk memperoleh nilai kekonvergenan  $\gamma$  pada skema persamaan (26) diperlukan nilai  $\alpha$  secara numerik yang dituliskan sebagai

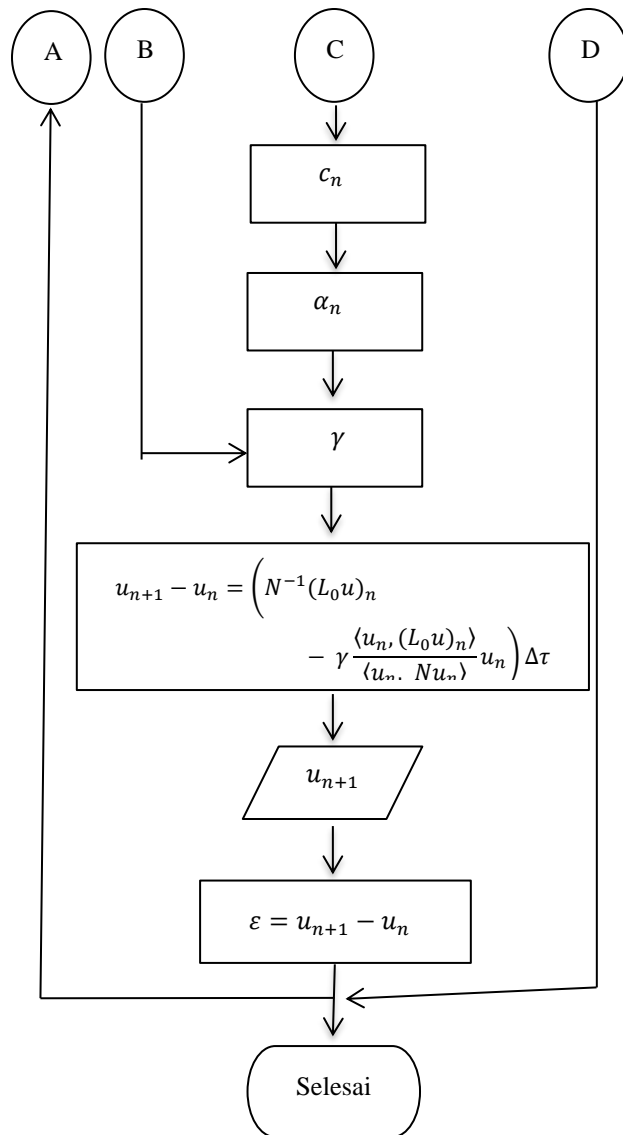
$$\alpha_n = \frac{\langle u_n, Lu_n \rangle}{\langle u_n, Nu_n \rangle}. \quad (30)$$

Dengan demikian, persamaan (25), (26), (29), dan (30) merupakan modifikasi metode iterasi Petviashvili yang dapat diterapkan untuk persamaan bertipe Schrödinger nonlinear dengan fungsi real potensial periodik.

Di bawah ini merupakan diagram alir (*flowchart*) penerapan modifikasi metode iterasi Petviashvili pada persamaan bertipe Schrödinger nonlinear.



Gambar 2. Flowchart modifikasi metode iterasi Petviashvili



Gambar 3. Flowchart pengembangan metode iterasi Petviashvili

#### 4. Kesimpulan

Algoritma pengembangan metode iterasi Petviashvili diperoleh dengan melakukan proses analisis dan penurunan skema numerik metode dasar iterasi Petviashvili. Pengembangan metode iterasi Petviashvili nantinya dapat diterapkan pada soliton dengan persamaan bertipe Schrödinger nonlinear 1-D dan 2-D. Salah satu parameter yang berpengaruh pada gelombang stasioner adalah konstanta rambat gelombang. Pemberian nilai konstanta rambat gelombang

yang berbeda juga menghasilkan gelombang stasioner dengan jumlah iterasi yang berbeda.

#### Ucapan Terima Kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Prof. Agus Suryanto yang telah membantu penulis dalam bertukar pikiran dalam penentuan topik penelitian ini .

#### DAFTAR PUSTAKA

- Achdou, Y., Buera, F. J., Lions, P., & Moll, B. (2014). Partial differential equation models in macroeconomics. *Journal Philosophical Transaction of The Royal Society, A* 372:0397, 1–19. <https://doi.org/Phil. Trans. R. Soc>
- Álvarez, J., & Durán, A. (2014). Journal of Computational and Applied Petviashvili type methods for traveling wave computations : I . Analysis of convergence. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 266, 39–51. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2014.01.015>
- Cho, Y. (2015). A modified Petviashvili method using simple stabilizing. *Journal of Engineering Mathematics*, 91(1), 37–57. <https://doi.org/10.1007/s10665-014-9744-z>
- Koleva, M. N., & Vulkov, L. G. (2013). A second-order positivity preserving numerical method for Gamma equation. *Applied Mathematics and Computation*, 220, 722–734. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2013.06.082>
- Lakoba, T. I., & Yang, J. (2007). A generalized Petviashvili iteration method for scalar and vector Hamiltonian equations with arbitrary form of nonlinearity, 226, 1668–1692. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2007.06.009>
- Michel Remoissenet. (2010). Analytical and Numerical Study of Soliton Collisions. *Waves Called Solitons: Concepts and Experiments*, Springer- Verlag (1999).
- Nisar, K. S., Ali, K. K., Inc, M., Mehanna, M. S., Rezazadeh, H., & Akinyemi, L. (2022). New solutions for the generalized resonant nonlinear



- Schrödinger equation. *Results in Physics*, 33(November 2021).  
<https://doi.org/10.1016/j.rinp.2021.105153>
- Pelinovsky & Stepanyants, Y. A. (2004). Convergences of Petviashvili's Iteration Method for Numerical Approximation of Stationary Solutions of Nonlinear Wave Equations. *SIAM J*, 42(2004), 1110–1127.
- Rezazadeh, H., Ullah, N., Akinyemi, L., Shah, A., Mirhosseini-Alizamin, S. M., Chu, Y. M., & Ahmad, H. (2021). Optical soliton solutions of the generalized non-autonomous nonlinear Schrödinger equations by the new Kudryashov's method. *Results in Physics*, 24.  
<https://doi.org/10.1016/j.rinp.2021.104179>
- Serkin, V. N., & Hasegawa, A. (2000). Novel soliton solutions of the nonlinear Schrodinger equation model. *Physical Review Letters*, 85(21), 4502–4505.  
<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.85.4502>
- Weiss, J. (2012). Modified equations , rational solutions , and the Painlevé property for the Kadomtsev – Petviashvili and Hirota – Satsuma equations Kadomtsev-Petviashvili and Hirota-Satsuma equations, 2174(1985).  
<https://doi.org/10.1063/1.526841>
- Yang, J., & Lakoba, T. I. (2007). Accelerated Imaginary-time Evolution Methods for the Computation of Solitary Waves. *J. Comput. Phys*, 226, 265–292.
- Zada, L., & Aziz, I. (2022). Numerical solution of fractional partial differential equations via Haar wavelet. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 38(2), 222–242.  
<https://doi.org/10.1002/num.22658>