Volume 6 No 1 Juni (2023)

e-ISSN: **2615-3270**

p-ISSN: **2615-3599**

Eigen Mathematics Journal

Homepage jurnal: http://eigen.unram.ac.id

Some Properties of Rough Ideals on Rough Rings

***Fakhry Asad Agusfrianto*[a*], *Lukita Ambarwati*[b]**

[a,b)]Program Studi Matematika, Universitas Negeri Jakarta, Jl. R.Mangun Muka Raya No.11, RT.11/RW.14, Rawamangun, Kec. Pulo Gadung, Kota Jakarta Timur, Daerah Khusus Ibukota Jakarta, 13220, Indonesia.
Email: fakhry_asad@yahoo.com

ABSTRACT

The concept of a rough set was first introduced by Pawlak in 1982. The basic concepts in set theory such as intersections, unions, differences, and complements still apply to rough sets. Furthermore, researchers in the field of mathematics and informatics who study rough sets can relate the concept of rough sets to algebraic structures so that a concept called rough algebraic structures is obtained. Some concepts of rough algebraic structures are rough groups, rough rings, and rough modules. In this paper, the properties related to the ideal of roughness will be given to the rough ring.

Keywords: Rough Bi-ideals, Rough Ideals, Rough Rings

Diserahkan: 11-10-2022; Diterima: 26-05-2023; Doi: https://doi.org/10.29303/emj.v6i1.147

1. Pendahuluan dan Dasar Teori

Konsep dasar pada aljabar yaitu teori himpunan seiring perkembangan penelitian memiliki beragam jenis. Salah satu jenisnya adalah himpunan kasar. Himpunan kasar awalnya diperkenalkan oleh ilmuwan asal Polandia, Pawlak pada 1982 (Pawlak, 1982). Selanjutnya, dalam struktur aljabar terdapat konsep grup, ring, dan modul (Adkins & Weintraub, 1992). Termotivasi dari struktur aljabar yang dibangun berdasarkan konsep himpunan, peneliti matematika yang meneliti di himpunan kasar berhasil mendefinisikan struktur kasar yang dinamakan struktur aljabar kasar. Konsep-konsep pada struktur aljabar kasar antara lain grup kasar (Miao et al., 2005), ring kasar (Davvaz, 2004), dan modul kasar (Davvaz & Mahdavipour, 2006) dan (Zhang et al., 2006). Selanjutnya, akan diingatkan kembali konsep-konsep pada himpunan kasar.

Definisi 1.1 (Davvaz, 2004) Diketahui $\mathfrak{U}$ himpunan semesta dan ∇ adalah relasi ekuivalensi di $\mathfrak{U}$. Pasangan $(\mathfrak{U},\nabla)$ disebut ruang aproksimasi.

Definisi 1.2 (Bagirmaz & Ozcan, 2015) Diketahui $\mathfrak{U}$ himpunan semesta dan ∇ adalah relasi ekuivalensi di $\mathfrak{U}$. Kelas ekuivalen yang memuat t di ∇ dinotasikan dengan $[t]_\nabla$.

Definisi 1.3 (Bagirman & Ozcan, 2015) Diketahui $(\mathfrak{U},\nabla)$ adalah ruang aproksimasi dan T adalah subhimpunan dari $\mathfrak{U}$. Himpunan

1. $\overline{T}=\{t|[t]_\nabla \cap T \neq \emptyset\}$;
2. $\underline{T}=\{t|[t]_\nabla \subseteq T\}$;
3. $\text{Batas}(T)=\overline{T}-\underline{T}$

secara berturut-turut disebut aproksimasi atas, aproksimasi bawah, dan batas dari T di $(\mathfrak{U},\nabla)$.

* Corresponding author.
Alamat e-mail: *fakhry_asad@yahoo.com*

Selanjutnya, T disebut himpunan kasar di $(\mathfrak{U}, \nabla)$ jika dan hanya jika Batas$(T) \neq \emptyset$.

Selanjutnya, untuk pemahaman lebih lanjut terkait definisi himpunan kasar, akan diberikan contoh soal sebagai berikut.

Contoh 1.4 Diberikan $\mathfrak{U} = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, definisikan kelas ekuivalensi $c - d = 2k$ dengan $c, d \in \mathfrak{U}$ dan $k \in \mathbb{R}$. Diperoleh kelas ekuivalensi:

$$\chi_1 = \{1,3,5,7\}$$
$$\chi_2 = \{2,4,6\}$$

Selanjutnya, misalkan $T = \{1,2,3\}$. Berdasarkan Definisi 1.3, maka diperoleh $\overline{T} = \mathfrak{U}$ dan $\underline{T} = \emptyset$. Karena $\overline{T} - \underline{T} \neq \emptyset$, maka T adalah himpunan kasar.

Proposisi 1.6 (Pawlak, 1982) Misalkan $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \subset \mathcal{U}$ dengan $\mathcal{U}$ adalah himpunan semesta. Maka, aproksimasi memiliki sifat-sifat berikut.

1. $\underline{\mathcal{X}} \subset \mathcal{X} \subset \overline{\mathcal{X}}$;
2. $\underline{\emptyset} = \overline{\emptyset} = \emptyset$ dan $\overline{\mathcal{U}} = \underline{\mathcal{U}} = \mathcal{U}$;
3. $\underline{\mathcal{X}} \cap \underline{\mathcal{Y}} = \underline{\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}}$;
4. $\overline{\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}} \subseteq \overline{\mathcal{X}} \cap \overline{\mathcal{Y}}$;
5. $\underline{\mathcal{X}} \cup \underline{\mathcal{Y}} \subseteq \overline{\mathcal{X} \cup \mathcal{Y}}$;
6. $\overline{\mathcal{X}} \cap \overline{\overline{\mathcal{Y}}} = \overline{\mathcal{X} \cup \mathcal{Y}}$;
7. $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}$ jika dan hanya jika $\underline{\mathcal{X}} \subset \underline{\mathcal{Y}}$ dan $\overline{\mathcal{X}} \subseteq \overline{\mathcal{Y}}$;
8. $\underline{\underline{\mathcal{X}}} = \underline{\mathcal{X}}$ dan $\overline{\overline{\mathcal{X}}} = \overline{\mathcal{X}}$.

Selanjutnya, akan diingatkan kembali definisi dari grup kasar.

Definisi 1.7 (Miao, et al., 2005) Diketahui $(\mathfrak{U}, \nabla)$ adalah ruang aproksimasi dan $\star$ adalah operasi biner yang didefinisikan di $\mathfrak{U}$. Subhimpunan $\mathcal{G}$ dari himpunan semesta $\mathfrak{U}$ disebut grup kasar jika kondisi berikut terpenuhi:

1. Untuk setiap $s, t \in \mathcal{G}, s \star t \in \overline{\mathcal{G}}$;
2. Untuk setiap $s, t, u \in \mathcal{G}, s \star (t \star u) = (s \star t) \star u$;
3. Ada $e \in \overline{\mathcal{G}}$ sedemikian sehingga untuk setiap $s \in \mathcal{G}$ berlaku, $s \star e = e \star s = s$; e adalah elemen identitas kasar di grup kasar $\mathcal{G}$
4. Untuk setiap $s \in \mathcal{G}$, ada $v \in \mathcal{G}$ sedemikian sehingga $s \star v = v \star s = e$; v adalah elemen invers kasar di grup kasar $\mathcal{G}$.

Selanjutnya, dari grup kasar kita dapat membentuk definisi dari ring kasar. Definisi dari ring kasar adalah sebagai berikut.

Definisi 1.8 (Zhang, et al., 2006) Misalkan $\mathcal{R}$ adalah himpunan kasar. Definisikan operasi di $\mathcal{R}$ sebagai " $+$ " dan " $\star$ " yang secara berturut-turut adalah operasi penjumlahan dan perkalian. Maka, sistem aljabar $(\mathcal{R}, +, \star)$ adalah ring kasar jika kondisi berikut dipenuhi:

1. $(\mathcal{R}, +)$ adalah grup komutatif kasar;
2. $(\mathcal{R}, \star)$ adalah semigrup kasar atau $\mathcal{R}$ memenuhi sifat asosiatif;
3. Untuk setiap $r, s, t \in \mathcal{R}$, maka $(r + s) \star t = r \star t + s \star t$ dan $r \star (s + t) = r \star s + r \star t$.
   Selanjutnya, akan diberikan definisi dari ideal kasar

Selanjutnya, dari definisi ring kasar kita punya definisi subring kasar dan ideal kasar sebagai berikut.

Definisi 1.9 (Agusfrianto et al., 2022) Misalkan $\mathcal{R}$ adalah ring kasar dengan $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{R}$. $\mathcal{S}$ dikatakan subring kasar dari $\mathcal{R}$ jika $\mathcal{S}$ adalah ring kasar dengan operasi yang sama dengan operasi $\mathcal{R}$.

Definisi 1.10 (Agusfrianto et al., 2022) Misalkan $\mathcal{R}$ adalah ring kasar dan $\mathfrak{I} \subseteq \mathcal{R}$. Subhimpunan $\mathfrak{I}$ disebut ideal kasar dari ring kasar $\mathcal{R}$ jika kondisi berikut dipenuhi:

1. Untuk setiap $u, v \in \mathfrak{I}, u - v \in \overline{\mathfrak{I}}$;
2. Untuk setiap $u \in \mathfrak{I}$ dan $r \in \mathcal{R}$, $ur, ru \in \overline{\mathfrak{I}}$.

Contoh 1.11 Misalkan $\mathfrak{U} = \mathbb{Z}_{11}$. Untuk setiap $j, k \in \mathfrak{U}$ dan untuk suatu $p \in \mathbb{R}$, definisikan relasi ekuivalensi $j - k = 5p$. Diperoleh kelas equivalen dari $\mathfrak{U}$ sebagai berikut:

$$\varepsilon_1 = \{\overline{1}, \overline{6}\},$$
$$\varepsilon_2 = \{\overline{2}, \overline{7}\},$$
$$\varepsilon_3 = \{\overline{3}, \overline{8}\},$$
$$\varepsilon_4 = \{\overline{4}, \overline{9}\},$$
$$\varepsilon_5 = \{\overline{0}, \overline{5}, \overline{10}\}$$

Selanjutnya, misalkan $\mathcal{X} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{10}\}$, diperoleh $\overline{\mathcal{X}} = \mathfrak{U}$ dan $\underline{\mathcal{X}} = \emptyset$. Maka $\mathcal{X}$ adalah himpunan kasar. Selanjutnya, definisikan penjumlahan $+_{11}$ dan perkalian $\star_{11}$ di $\mathcal{X}$. Berikut adalah tabel operasi $+_{11}$ dan $\star_{11}$ di $\mathcal{X}$.

Tabel 1. Tabel elemen $\mathcal{X}$ terhadap operasi $+_{11}$

$+_{11}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{10}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{10}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{0}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{10}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$

$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{3}$
$\overline{7}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{10}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$
$\overline{8}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{7}$
$\overline{10}$	$\overline{10}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{3}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{9}$

Tabel 2. Tabel elemen $\mathcal{X}$ terhadap operasi $\star_{11}$

$\star_{11}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{10}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{10}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{9}$	$\overline{2}$	$\overline{10}$	$\overline{2}$	$\overline{8}$
$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{10}$	$\overline{7}$
$\overline{7}$	$\overline{0}$	$\overline{7}$	$\overline{10}$	$\overline{6}$	$\overline{5}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$
$\overline{8}$	$\overline{0}$	$\overline{8}$	$\overline{2}$	$\overline{10}$	$\overline{1}$	$\overline{9}$	$\overline{3}$
$\overline{10}$	$\overline{0}$	$\overline{10}$	$\overline{8}$	$\overline{7}$	$\overline{6}$	$\overline{3}$	$\overline{1}$

Berdasarkan Definisi 3.1, $\mathcal{X}$ adalah ring kasar. Selanjutnya, misalkan $\mathfrak{I} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\}$. Dengan menggunakan kelas ekuivalen yang sama diperoleh $\overline{\mathfrak{I}} = \mathfrak{U}$. Selanjutnya, untuk setiap $a, b \in \mathfrak{I}$, berlaku bahwa $a - b \in \overline{\mathfrak{I}}$ dan untuk setiap $x \in \mathcal{X}$, berlaku bahwa $xa, ax \in \overline{\mathfrak{I}}$. Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa $\mathfrak{I}$ adalah ideal kasar dari $\mathcal{X}$.

Pada paper ini, akan diberikan definisi dari bi-ideal kasar dari ring kasar. Selanjutnya, akan dibahas sifat terkait bi-ideal kasar. Terakhir, akan ditunjukkan bahwa akan ditunjukkan bahwa perkalian dari dua aproksimasi atas dari ideal kasar merupakan subhimpunan dari irisan dua aproksimasi atas dari ideal kasar.

2. Metodologi Penelitian

Metode Penelitian yang digunakan dalam paper ini adalah kajian literatur. Pertama, kita ingatkan kembali definisi dari ring kasar dan ideal kasar. Selanjutnya, akan diberikan definisi dari bi-ideal kasar dan akan ditunjukkan jika I adalah bi-ideal, maka I adalah bi-ideal kasar. Terakhir, akan ditunjukkan bahwa perkalian dari dua aproksimasi atas dari ideal kasar merupakan subhimpunan dari irisan dua aproksimasi atas dari ideal kasar.

3. Hasil dan Pembahasan

Pada bagian ini, akan dibahas sifat – sifat terkait ideal kasar. Sebelum ditunjukkan sifat terkait ideal kasar, akan diberikan definisi dari bi-ideal kasar dari ring kasar.

Definisi 3.1 Misalkan $(\mathfrak{U}, \nabla)$ adalah ruang aproksimasi dan $\mathcal{R} \subseteq \mathfrak{U}$ adalah ring kasar dan $(\star)$ adalah operasi biner di $\mathfrak{U}$. Subring kasar $\mathfrak{I}$ dari ring kasar $\mathcal{R}$ disebut bi-ideal kasar dari $\mathcal{R}$ jika $\mathfrak{I}\mathcal{R}\mathfrak{I} \subseteq \overline{\mathfrak{I}}$.

Contoh 3.2 Berdasarkan Contoh 1.10, $\mathcal{X} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{10}\}$ merupakan ring kasar dan $\mathfrak{I} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\}$ adalah ideal kasar dari $\mathcal{X}$. Dari sini, diperoleh $\mathfrak{I}\mathcal{X}$ adalah sebagai berikut.

Tabel 3. Tabel Perkalian $\mathfrak{I}\mathcal{X}$

$\star_{11}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{10}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{10}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{6}$	$\overline{8}$	$\overline{3}$	$\overline{5}$	$\overline{9}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{9}$	$\overline{2}$	$\overline{10}$	$\overline{2}$	$\overline{8}$
$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{10}$	$\overline{7}$

Dari Tabel 3, diperoleh $\mathfrak{I}\mathcal{X} = \mathfrak{U}$. Maka $\mathfrak{I}\mathcal{X}\mathfrak{I} = \mathfrak{U} \subseteq \overline{\mathfrak{I}}$. Dengan demikian, $\mathfrak{I} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\}$ adalah bi-ideal kasar dari $\mathcal{X}$.

Proposisi 3.3 Misalkan $(\mathfrak{U}, \nabla)$ adalah ruang aproksimasi dan $\mathcal{R} \subseteq \mathfrak{U}$ adalah ring kasar. Jika $\mathfrak{I}$ adalah bi-ideal dari $\mathcal{R}$, maka $\mathfrak{I}$ adalah bi-ideal kasar dari ring kasar $\mathcal{R}$.

Bukti. Diketahui $\mathfrak{I}$ adalah bi-ideal atau $\mathfrak{I}\mathcal{R}\mathfrak{I} \subseteq \mathfrak{I}$. Dengan menggunakan sifat (1) pada Proposisi 1.6, maka kita peroleh $\mathfrak{I} \subseteq \overline{\mathfrak{I}}$. Oleh karena itu, $\mathfrak{I}$ adalah bi-ideal kasar dari ring kasar $\mathcal{R}$. Selanjutnya, berdasarkan (1) Proposisi 1.6, $\overline{\mathfrak{I}}$ adalah bi-ideal dari $\mathcal{R}$. Sehingga $\mathfrak{I}$ adalah bi-ideal kasar dari $\mathcal{R}$. Berdasarkan sifat (7) pada Proposisi 1.6, kita dapatkan $\overline{\mathfrak{I}} \subseteq \overline{\mathcal{R}}$. Lalu, dengan sifat (1) pada Proposisi 1.6, kita dapatkan bahwa $\mathfrak{I} \subseteq \overline{\mathfrak{I}}$. Dengan demikian, $\mathfrak{I}\mathcal{R}\mathfrak{I} \subseteq \mathfrak{I} \subseteq \overline{\mathfrak{I}}$. Ini berarti $\mathfrak{I}\mathcal{R}\mathfrak{I} \subseteq \overline{\mathfrak{I}}$ atau dengan kata lain $\mathfrak{I}$ adalah bi-ideal kasar dari ring kasar $\mathcal{R}$.

Proposisi 3.4 Misalkan $(\mathfrak{U}, \nabla)$ adalah ruang aproksimasi dengan $\mathcal{R} \subseteq \mathfrak{U}$ adalah ring kasar. Jika $\mathfrak{I}$ adalah ideal kasar kanan dari $\mathcal{R}$ dan $\mathcal{J}$ adalah ideal kasar kiri dari $\mathcal{R}$, maka $\overline{\mathfrak{I}\mathcal{J}} \subseteq \overline{\mathfrak{I}} \cap \overline{\mathcal{J}}$.

Bukti. Diketahui $\mathfrak{I}$ adalah ideal kasar kanan dari $\mathcal{R}$ dan $\mathcal{J}$ adalah ideal kasar kiri dari $\mathcal{R}$. Berdasarkan hal ini, diperoleh $\mathfrak{I}\mathcal{J} \subseteq \mathfrak{I}\mathcal{R} \subseteq \overline{\mathfrak{I}}$ dan $\mathfrak{I}\mathcal{J} \subseteq \mathcal{R}\mathcal{J} \subseteq \overline{\mathcal{J}}$. Dengan demikian, $\mathfrak{I}\mathcal{J} \subseteq \overline{\mathfrak{I}} \cap \overline{\mathcal{J}}$. Selanjutnya, berdasarkan sifat (7) dan (4) pada Proposisi 1.6, diperoleh

$$\overline{\mathfrak{I}\mathcal{J}} \subseteq \overline{\overline{\mathfrak{I}} \cap \overline{\mathcal{J}}} \subseteq \overline{\overline{\mathfrak{I}}} \cap \overline{\overline{\mathcal{J}}}$$

Selanjutnya, berdasarkan sifat (8) pada Proposisi 1.6, maka diperoleh $\overline{\overline{\mathfrak{I}}} = \overline{\mathfrak{I}}$ dan $\overline{\overline{\mathcal{J}}} = \overline{\mathcal{J}}$. Dengan demikian, diperoleh bahwa $\overline{\mathfrak{I}\mathcal{J}} \subseteq \overline{\mathfrak{I}} \cap \overline{\mathcal{J}}$.

4. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan diatas, kita telah mendefinisikan bi-ideal kasar. Selanjutnya, kita juga telah membuktikan jika I adalah bi-ideal, maka I merupakan bi-ideal kasar dari ring kasar R. Terakhir, telah ditunjukkan bahwa perkalian dari dua aproksimasi atas dari ideal kasar merupakan subhimpunan dari irisan dua aproksimasi atas dari ideal kasar.

Ucapan Terima Kasih

Terimakasih kepada para reviewer yang telah mereview artikel ini dengan baik.

DAFTAR PUSTAKA

Adkins, W.A, & Weintraub, S. H. (1992). Algebra : An Approach Via Module Theory. Springer-Verlag.

Agusfrianto, F. A., Fitriani, & Mahatma, Y. (2022). Rough Rings, Rough Subrings, and Rough Ideals. Journal of Fundamental Mathematics and Applications.

Bagirmaz, N., & Ozcan, A. F. (2015). Rough semigroups on approximation spaces. International Journal of Algebra, 9(7), 339–350. https://doi.org/10.12988/ija.2015.5742.

Davvaz, B. (2004). Roughness in rings. Information Sciences, 164(1–4), 147–163. https://doi.org/10.1016/j.ins.2003.10.001.

Davvaz, B., & Mahdavipour, M. (2006). Roughness in modules. Information Sciences, 176(24), 3658–3674. https://doi.org/10.1016/j.ins.2006.02.014.

Miao, D., Han, S., Li, D., & Sun, L. (2005). Rough Group , Rough Subgroup an Their Properties. In Lecture Notes in Artificial Intelligence (Issue 3641, pp. 104–113).

Pawlak, Z. (1982). Rough Sets. International Journal of Computer and Information Sciences, 11(5), 341–356. https://doi.org/10.1007/978-1-4613-1461-5_1.

Zhang, Q. F., Fu, A. M., & Zhao, S. X. (2006). Rough modules and their some properties. Proceedings of the 2006 International Conference on Machine Learning and Cybernetics, 2006(August), 2290–2293. https://doi.org/10.1109/ICMLC.2006.258675.