Volume 2 No 2 Desember (2019)

e-ISSN:**2615-3270**

p-ISSN: **2615-3599**

Eigen Mathematics Journal

Homepage jurnal: http://eigen.unram.ac.id

Subgrup Non Trivial Dari Grup Dihedral

Abdul Gazir S.[a], I Gede Adhitya Wisnu Wardhana[b,*]

[a]Universitas Mataram,Alamat , Kota dan KodePos, Indonesia. Email: abdgazirsyazir@gmail.com
[b]Universitas Mataram, Alamat, Kota dan KodePos, Indonesia. Email: adhitya.wardhana@unram.ac.id

ABSTRACT

The dihedral group is a symmetry group of a regular polygon consisting of a rotational element and a reflection element, the group is denoted by D_{2n}. Dihedral groups are studied by chemists or mineralogists to classify molecular and crystalline structures. This paper will discuss subgroups of a dihedral group. One of the results is, if n is prime then the subgroup can be divided into two categories, namely rotational subgroups and reflection subgroups. Another result when n is composites, the subgroup can be divided into three categories, namely rotational subgroups and reflection subgroups and combination of both reflection and rotational subgroups.

Keywords: Dihedral groups, Dihedral subgroup, Rotation, Reflection.

ABSTRAK

Grup dihedral adalah grup simetri dari sebuah polygon reguler yang terdiri dari unsur rotasi dan unsur refleksi, Grup dihedral dinotasikan dengan D_{2n}. Grup dihedral dipelajari oleh kimiawan atau ahli mineral untuk mengklasifikasikan struktur molekul dan kristal. Pada paper ini akan dibahas subgroup-subgrup dari suatu grup dihedral. Salah satunya hasilnya adalah, jika n prima maka subgroup dapat dibagi kedalam 2 kategori, yaitu subgrup yang mengandung rotasi dan subgrup yang mengandung refleksi. Jika n komposit maka subgroup dapat dibagi menjadi 3 kategori yaitu subgrup yang mengandung rotasi, subgrup yang mengandung refleksi dan subgrup yang mengandung keduanya.

Keywords: Grup Dihedral, Subgrup Dihedral, Rotasi, Refleksi.

Diserahkan: 20-05-2019; Diterima: 31-12-2019; Doi: https://doi.org/10.29303/emj.v1i2.26

* Corresponding author.
Alamat e-mail: adhitya.wardhana@unram.ac.id

1. Pendahuluan

Grup dihedral adalah topik yang menarik karena banyak muncul di alam maupun di karya seni. Untuk karya seni, grup dihedral banyak dijadikan dasar dalam dekorasi lantai, dinding atau pekerjaan seni lainnya. Di alam grup dihedral dipelajari oleh ahli mineral dan ahli kimia untuk mempelajari struktur molekul atau struktur kristal.

Grup dihedral itu sendiri adalah grup simetri dari polygon regular yang terdiri dari unsur rotasi dan unsur refleksi. Grup dihedral disimbolkan dengan D_{2n}, dimana n menunjukkan bentuk dari polygon. Secara matematis grup dihedral didefinisikan sebgai berikut:

Definisi 1.1
Misalkan G adalah grup. Grup G dikatakan grup dihedral dengan order $2n, n \geq 3$, adalah grup yang dibangun oleh dua elemen a, b dengan

$$G = D_{2n} = \langle a, b | a^n = e, b^2 = e, bab^{-1} = a^{-1} \rangle$$

Unsur b adalah elemen yang berorde 2, dan dinamakan unsur refleksi, dan unsur a yang berorde lebih dari $n \geq 3$ dikatakan unsur rotasi. Mudah dilihat bahwa order dari grup dihedral D_{2n} adalah $2n$. Sebagai contoh, untuk $n = 3$, diperoleh grup dihedral $D_6 = \{e, a, a^2, b, ab, a^2b\}$.

Unsur refleksi b karena berorde 2 maka akan memiliki invers dirinya sendiri. Unsur b tidak satu-satunya unsur refleksi, atau unsur yang berorde 2 pada grup dihedral. Unsur refleksi lain pada grup dihedral mempunyai bentuk sebagai pada Teorema berikut.

Teorema 1.1
Misalkan D_{2n} grup dihedral dan $x \in D_{2n}$ adalah unsur refleksi, maka $x = a^k b$ untuk $\in \{1, \dots, n\}$
.
Bukti
Untuk menunjukkan x unsur refleksi, akan ditunjukkan $x^2 = e$. Karena diketahui $b^{-1} = b$ maka $a^{-1} = bab$. Akibatnya

$$x^2 = (a^k b)(a^k b)$$
$$x^2 = (a^{k-1}eab)(a^{k-1}eab)$$
$$x^2 = (a^{k-1}b^2ab)(a^{k-1}b^2ab)$$
$$x^2 = (a^{k-1}b)(a^{k-1}b)$$
$$x^2 = (a^{k-2}b^2ab)(a^{k-2}b^2ab)$$
$$x^2 = (a^{k-2}b)(a^{k-2}b)$$

Proses dapat terus diulangi sehingga

$$x^2 = abab = aa^{-1} = e$$

Akibatnya x adalah unsur refleksi. ■

Dari Teorema 1.1, maka grup dihedral D_{2n} dapat ditulis ulang sebagai berikut:
$D_{2n} = \{e, a, a^2 \dots, a^{n-1}, b, ab, a^2b, \dots, a^{n-1}b\}$.

Salah satu sifat menarik dari unsur grup dihedral diberikan oleh Teorema berikut.

Teorema 1.2
Misalkan D_{2n} grup dihedral, jika $u \leq n$ maka $a^r b a^{n-u} = a^r a^u b$.

Bukti:
Misalkan $u \leq n$, maka diperoleh

$$\begin{aligned} a^r b a^{n-u} &= a^r b a^{-u} = a^r b (a^{-1}) a^{-u+1} \\ &= a^r b (bab) a^{-u+1} \\ &= a^r a b a^{-u+1} \end{aligned}$$

Proses dapat diteruskan hingga diperoleh

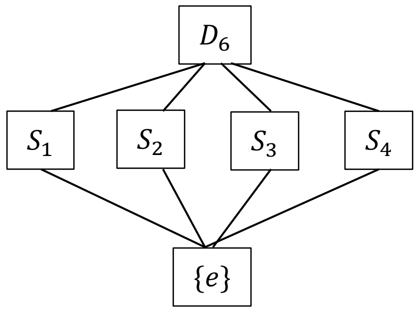
$$a^r b a^{n-u} = a^r a^u b. \blacksquare$$

Grup dihedral untuk selanjutnya akan disimbolkan dengan D_{2n} pada artikel ini.

2. Subgrup Dihedral

Pada bagian ini akan diidentifikasi semua subgrup Dihedral. Untuk mengetahui subgrup dari grup secara umum biasanya digunakan tabel Cayley. Tabel Cayley adalah salah satu cara untuk mendefinisikan operasi biner pada himpunan, khususnya himpunan berhingga. Contohnya grup dihedral $D_6 = \{e, a, a^2, b, ab, a^2b\}$ mempunya subgrup

nontrivial diantaranya: $S_1 = \{e, a, a^2\}$, $S_2 = \{e, b\}$, $S_3 = \{e, ab\}$, $S_4 = \{e, a^2b\}$.
Sehingga table Cayley bisa digambar sebagai berikut:



Tabel Cayley akan memberikan hasil berbeda untuk setiap grup D_{2n}. Secara umum , subgroup dari D_{2n} akan tergantung karakteristik dari n. Salah satu karakteristik dari grup dihedral adalah himpunan semua unsur rotasinya membentuk subgrup.

Teorema 2.1
Diberikan D_{2n} grup dihedral dengan $n \geq 3$. Jika $R = \{e, a, a^2, a^3, \dots, a^{n-1}\} \subseteq D_{2n}$ maka R adalah subgrup nontrivial dari D_{2n}.
Bukti
Jelas bahwa S bukan himpunan kosong karena $e = a^n \in R$. Selanjutnya ambil sebarang $x, y \in S$, maka $x = a^r$ dan $y = a^s$, untuk suatu $r, s \in N$. Tanpa mengurangi perumuman, asumsikan $r > s$. Akibatnya $xy^{-1} = a^r(a^s)^{-1} = a^r a^{n-s} = a^{n+r-s} = a^{r-s} \in R$. Dengan demikian terbukti R subgrup dari D_{2n}, dimana atau $R = \langle a \rangle$. ■

Karakteristik lainnya dari subgroup D_{2n} adalah, setiap satu unsur refleksi dan unsur identitas membentuk subgroup.

Teorema 2.2
Diberikan D_{2n} grup dihedral dengan $n \geq 3$. Jika $S_i = \{e, a^i b\} \subseteq D_{2n}$ dimana $i = 0,1,2, \dots, n-1$ maka S adalah subgrup nontrivial dari D_{2n}.
Bukti
Jelas bahwa S_i bukan himpunan kosong karena $e \in S_i$. Selanjutnya tinggal ditunjukkan bahwa $a^i b$ memiliki invers di S_i. Berdasarkan Teorema 1.1, maka invers dari $a^i b$ adalah dirinya sendiri. Akibatnya S_i membentuk subgrup dari D_{2n}.■

Subgrup yang diberikan oleh Teorema 2.1 dinamakan subgrup rotasi. Sementara subgrup yang diberikan oleh Teorema 2.2 dinamakan subgrup Refkleksi ke-i. Secara umum, setiap grup dihedral memiliki subgrup rotasi dan subgrup refleksi. Khususnya jika n berupa bilangan prima tidak ada subgrup nontrivial selain R dan S_i. Apabila n bilangan komposit, grup dihedral mempunyai subgrup yang lebih bervariasi, salah satunya adalah subgrup yang terdiri dari sebagian unsur rotasinya.

Teorema 2.3
Diberikan D_{2n} grup dihedral dengan $n \geq 3$ dan $n = p_1 p_2 p_3 \dots p_k$, dengan p_i adalah bilangan prima yang berbeda. Maka $R_i = \{e, a^{p_i}, a^{2p_i}, a^{3p_i}, \dots, a^{n-p_i}\} \subseteq D_{2n}$ adalah subgrup nontrivial dari D_{2n}.
Bukti
Jelas bahwa R_i bukan himpunan kosong karena $e = a^n \in R_i$. Selanjutnya ambil sebarang $x, y \in R_i$, maka $x = a^r$ dan $y = a^s$, untuk suatu $r, s \in < p_i >$. Tanpa mengurangi perumuman, asumsikan $r > s$. Akibatnya $xy^{-1} = a^r(a^s)^{-1} = a^r a^{n-s} = a^{n+r-s} = a^{r-s} \in R_i$.
Dengan demikian terbukti R_i subgrup nontrivial dari D_{2n} yang dibangun oleh a^{p_i} atau $R_i =< a^{p_i} >$. ■

Selain subgrup R_i, apabila n komposit kita akan memiliki subgrup yang terdiri dari kombinasi unsur rotasi dan unsur refleksi.

Teorema 2.4
Diberikan D_{2n} grup dihedral dengan $n \geq 3$ dan $= p_1 p_2 p_3 \dots p_k$, dengan p_i adalah bilangan prima yang berbeda. Maka untuk $i \in \{1,2, \dots, k\}$ dan $j \in \{0,1,2, \dots, p_i - 1\}$, $G_{ij} = \{e, a^{p_i}, a^{2p_i}, \dots, a^{n-p_i}, a^j b, a^{j+p_i} b, \dots, a^{j+n-p_i}\} \subseteq D_{2n}$ adalah subgrup nontrivial dari D_{2n}.

Bukti
Jelas bahwa G_{ij} bukan himpunan kosong karena $e = a^n \in G_{ij}$, Selanjutnya ambil sebarang $x, y \in G_{ij}$, tulis $x = a^r b^s$ dan $y = a^u b^v$.

Karena $y^{-1} = b^{-v}a^{n-u} = b^{-v}a^{-u}$diperoleh $xy^{-1} = a^r b^s b^{-v} a^{-u}$.
Perhatikan bahwa untuk $s = 0$ maka $r = 0, p_i, 2p_i, \dots, n - p_i$ sedangkan jika $s = 1$ maka $r = k, k + p_i, k + 2p_i, \dots, k + n - p_i$ untuk suatu $k \in \mathbb{N}, 0 \leq k < p_i$. Demikian juga untuk u dan v.

<u>Kasus 1</u> $s = v = 0$ maka $xy^{-1} = a^r (a^u)^{-1} = a^r a^{n-u}$ dimana $r = l_1 p_i$ dan $u = l_2 p_i$ akibatnya $a^{l_1 p_i} a^{n - l_2 p_i} = a^{n + (l_1 p_i - l_2 p_i)} = a^{n + (l_1 - l_2) p_i} = a^{(l_1 - l_2) p_i}$. Dengan demikian terbukti $xy^{-1} \in G_{ij}$.

<u>Kasus 2</u> $s = 1, v = 0$ maka $xy^{-1} = a^r b (a^u)^{-1} = a^r b\, a^{n-u} = a^r a^u b$ dimana $r = k + l_1 p_i$ dan $u = l_2 p_i$ akibatnya $a^{k + l_1 p_i} a^{l_2 p_i} b = a^{k + (l_1 p_i + l_2 p_i)} b = a^{k + (l_1 + l_2) p_i} b = a^{k + (l_1 + l_2) p_i} b$. Dengan demikian terbukti $xy^{-1} \in G_{ij}$.

<u>Kasus 3</u> $s = 0, v = 1$ maka $xy^{-1} = a^r (a^u b)^{-1} = a^r b^{-1} a^{n-u} = a^r a^u b$ dimana $r = l_1 p_i$ dan $u = k + l_2 p_i$ akibatnya $a^{l_1 p_i} a^{k + l_2 p_i} b = a^{k + (l_1 p_i + l_2 p_i)} b = a^{k + (l_1 + l_2) p_i} b = a^{k + (l_1 - l_2) p_i} b$. Dengan demikian terbukti $xy^{-1} \in G_{ij}$.

<u>Kasus 4</u> $s = 1, v = 1$ maka $xy^{-1} = a^r b (a^u b)^{-1} = a^r b\, b^{-1} a^{n-u} = a^r e a^{n-u} = a^r a^{n-u}$ dimana $r = k + l_1 p_i$ dan $u = k + l_2 p_i$ akibatnya $a^{k + l_1 p_i} a^{n - k - l_2 p_i} = a^{n + (l_1 p_i - l_2 p_i)} b = a^{n + (l_1 - l_2) p_i} b = a^{(l_1 - l_2) p_i} b$. Dengan demikian terbukti $xy^{-1} \in G_{ij}$.

Dari empat kasus di atas terbukti bahwa G_{ij} subgrup nontrivial dari D_{2n}. ■

Daftar Pustaka

David, S Dummid and Foote, Richard M. 1991. *Abstrak Algebra*. New Jersey: Division of Simon & Schauster, Inc.

Fraleigh, John. 1997. A First Course In Abstract Algebra, Seventh Edition. United States of America : Pearson Education Limited.

Herstein, I. N. 1975. Topics in Algebra, Second Edition. Singapura : John Wiley & Sons.