VOLUME 1 NO 1 JUNI 2018
e- ISSN: **2615-3270**
p-ISSN: 2615-3599

Eigen Mathematics Journal

Homepage jurnal: http://eigen.unram.ac.id

Karakteristik Ideal Semiprima Fuzzy di Semigrup *S*

***Abdurahim*[a,*], *Andi Sofyan Anas*[b], *Habib Ratu Perwira Negara*[c], *Ahmad*[d], *Gilang Primajati*[e]**

[a]STMIK Bumi Gora Mataram, Jalan Ismail Marzuki No.22, Mataram, 83127, Indonesia. Email:aim.math13@gmail.com
[b]STMIK Bumi Gora Mataram, Jalan Ismail Marzuki No.22, Mataram, 83127, Indonesia. Email:andy.sofyan@stmikbumigora.ac.id
[c]STMIK Bumi Gora Mataram, Jalan Ismail Marzuki No.22, Mataram, 83127, Indonesia. Email:habib.ratu27@gmail.com
[d]STMIK Bumi Gora Mataram, Jalan Ismail Marzuki No.22, Mataram, 83127, Indonesia. Email:ahmad_mountshaf@yahoo.co.id
[e]STMIK Bumi Gora Mataram, Jalan Ismail Marzuki No.22, Mataram, 83127, Indonesia. Email:gilangeuler@gmail.com

A B S T R A C T

A function f is called as a fuzzy prime ideal if every fuzzy ideal g and h satisfied $g \circ h \subseteq f$ caused $g \subseteq f$ or $h \subseteq f$ and a function f is called as a fuzzy semiprime ideal if every fuzzy ideal g which required $g \circ g \subseteq f$ caused $g \subseteq f$. The previous research has been studied the ideal characteristics of fuzzy prime. Since not all semiprime fuzzy ideal are prime fuzzy ideal, resulted in some characteristic of fuzzy semiprime ideal do not exist in characteristics of the fuzzy prime ideal. This study examines the characteristics of the fuzzy semiprime ideal along with some examples of those characteristics.

Keywords : Fuzzy Prime Ideal, Fuzzy Semiprime Ideal, Fuzzy Semiprime Ideal Characteristics.

1. Pendahuluan

Pertama kali himpunan fuzzy diperkenalkan pada tahun 1965 oleh seorang guru besar di *University of California, Barkeley* Amerika Serikat, Lotfi A. Zadeh. Himpunan fuzzy ini dikenalkan melalui tulisannya yang berjudul *Fuzzy Sets*. Dalam tulisannya, Zadeh memperluas konsep himpunan klasik. Himpunan didefinisikan sebagai suatu koleksi obyek yang terdefinisi dengan tegas, dalam arti bahwa dapat ditentukan secara tegas apakah suatu objek merupakan anggota himpunan atau bukan. Jadi, suatu himpunan A dalam semesta X dapat didefinisikan dengan menggunakan suatu fungsi yaitu $C_A : X \to \{0,1\}$ yang disebut fungsi karakteristik dari himpunan A. Dengan memperumum konsep fungsi karakteristik, himpunan fuzzy didefinisikan menggunakan fungsi keanggotaan yang nilainya berada dalam selang tertutup $[0,1]$ (Zadeh, 1965). Jadi, keanggotaan dalam himpunan fuzzy tidak lagi seperti pada himpunan klasik yaitu apakah merupakan anggota atau bukan, melainkan suatu yang memiliki derajat dalam interval tertutup $[0,1]$ (Setiadji, 2009).

Setelah Zadeh memperkenalkan teori himpunan fuzzy, banyak peneliti mengaplikasikan konsep fuzzy ini untuk mengembangkan beberapa dugaan/ide dasar pada aljabar. Salah satunya Rosenfeld mengaplikasikan himpunan fuzzy ke dalam teori struktur aljabar fuzzy yang merupakan pengembangan dari teori struktur aljabar dengan teori himpunan fuzzy. Rosenfeld mengaplikasikan konsep teori himpunan fuzzy ke dalam teori semigrup dan grup (Rosenfeld, 1971).

Kajian yang banyak diteliti adalah terkait ideal fuzzy melalui tulisannya mengkaji tentang sifat-sifat ideal (bi-ideal) kiri fuzzy, ideal (bi-ideal) kanan fuzzy dan ideal (bi-ideal) fuzzy. Lebih jauh, Kuroki dalam tulisannya menunjukkan bahwa semigrup S semisimpel jika dan hanya jika setiap ideal fuzzy S idempoten (Kuroki, 1991),. Selanjutnya, dikenalkan ide dari ideal prima dalam

* *Corresponding author. aim.math13@gmail.com*

semigrup S dan menunjukkan bahwa S semigrup semisimpel jika dan hanya jika setiap ideal fuzzynya merupakan irisan dari ideal-ideal fuzzy prima (Ahsan, 1995). Dan pada artikel lainnya dikaji karakteristik ideal prima fuzzy di semigrup S (Abdurahim, 2017).

Ideal fuzzy f pada semigrup S disebut ideal prima fuzzy pada S jika untuk setiap ideal fuzzy g, h pada S yang memenuhi $g \circ h \subseteq f$ berakibat $g \subseteq f$ atau $h \subseteq f$. Sedangkan ideal fuzzy f pada semigrup S disebut ideal semiprima fuzzy pada S jika untuk setiap ideal fuzzy g pada S yang memenuhi $g \circ g \subseteq f$ berakibat $g \subseteq f$. Dari definisi ideal prima fuzzy dan ideal semiprima fuzzy tersebut, dapat disimpulkan bahwa ideal semiprima fuzzy bersifat lebih umum daripada ideal prima fuzzy. Oleh karena itu, dalam tulisan ini akan dikaji karakteristik ideal semiprima fuzzy pada S.

2. Dasar Teori

2.1. Himpunan Fuzzy

Fungsi karakteristik dari himpunan A dapat diperluas menjadi fungsi keanggotaan fuzzy yang memetakan himpunan tak kosong X ke interval tertutup $[0,1]$. Selanjutnya, dengan mengganti domain fungsinya yaitu himpunan X dengan semigrup S, didefinisikan suatu fungsi yang disebut subhimpunan fuzzy, yaitu $f : S \to [0,1]$.

Diberikan himpunan $S \neq \emptyset$. Misalkan f dan g merupakan subhimpunan fuzzy dari S. Didefinisikan subhimpunan-subhimpunan fuzzy dari S yaitu $f \cap g$, dan $f \cup g$ sebagai :

$$(f \cap g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}$$
$$(f \cup g)(x) = \text{maks}\{f(x), g(x)\}$$

Selanjutnya, pada tulisan ini irisan dan gabungan subhimpunan fuzzy akan dinotasikan berturut-turut dengan $(f \cap g)(x) = f(x) \wedge g(x)$ dan $(f \cup g)(x) = f(x) \vee g(x)$, untuk setiap $x \in S$. Kemudian untuk produk (komposisi) dari dua subhimpunan fuzzy f dan g, dinotasikan dengan f ∘ g, didefinisikan sebagai :

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} \bigvee_{x=yz} f(y) \wedge g(z), \text{jika}(\exists y, z \in S)(x = yz) \\ 0, \text{lainnya.} \end{cases}$$

Contoh 2.1 Diberikan semigrup $S = \{a, b, c, d, e\}$ dengan operasi biner # yang didefinisikan sebagai berikut.

$*$	a	b	c	d	e
a	a	d	a	d	d
b	a	b	a	d	d
c	a	d	c	d	e
d	a	d	a	d	d
e	a	d	c	d	e

Diberikan subhimpunan fuzzy f dan g yang didefiniskan berturut-turut sebagai berikut.
$f = \{(a|0.3), (b|1), (c|0.5), (d|0.8), (e|1)\}$ dan
$g = \{(a|0.1), (b|0.5), (c|0.5), (d|0.2), (e|0.3)\}$.
Diperhatikan bahwa

$$\begin{aligned}(f \circ g)(a) &= \bigvee\Big(\big(f(a) \wedge g(a)\big), \big(f(a) \wedge g(c)\big), \big(f(b) \wedge g(a)\big), \big(f(b) \wedge g(c)\big), \big(f(c) \wedge g(a)\big), \big(f(d) \wedge g(a)\big), \big(f(d) \wedge g(c)\big), \big(f(e) \wedge g(a)\big)\Big) \\ &= \bigvee\big((0.3 \wedge 0.1), (0.3 \wedge 0.5), (1 \wedge 0.1), (1 \wedge 0.5), (0.5 \wedge 0.1), (0.8 \wedge 0.1), (0.8 \wedge 0.5), (1 \wedge 0.1)\big) \\ &= \bigvee(0.1, 0.3, 0.1, 0.5, 0.1, 0.1, 0.5, 0.1) = 0.5\end{aligned}$$

Dengan cara yang sama, diperoleh $(f \circ g)(b) = 0.5$, $(f \circ g)(c) = 0.5$, $(f \circ g)(d) = 0.5$, dan $(f \circ g)(e) = 0.3$. Jadi, $f \circ g = \{(a|0.5), (b|0.5), (c|0.5), (d|0.5), (e|0.3)\}$.

Jika diberikan sebarang subhimpunan fuzzy f dan g, maka $f \subseteq g$ jika dan hanya jika $f(x) \leq g(x)$ untuk setiap $x \in S$.
Diberikan semigrup S dan subhimpunan fuzzy f, g dan h pada S. Jika $f \subseteq g$ maka $f \circ h \subseteq g \circ h$ dan $h \circ f \subseteq h \circ g$.

Diberikan semigrup S. Subhimpunan fuzzy f pada semigrup S merupakan subsemigrup fuzzy jika dan hanya jika $f(xy) \geq f(x) \wedge f(y)$ untuk setiap $x, y \in S$.

2.2. Ideal Fuzzy

Diberikan semigrup S. Subhimpunan fuzzy tak kosong f disebut ideal kiri (kanan) fuzzy pada S jika $C_S \circ f \subseteq f (f \circ C_S \subseteq f)$. Selanjutnya f disebut ideal fuzzy jika f ideal kiri dan kanan fuzzy. Selanjutnya diberikan karakteristik suatu ideal fuzzy pada semigrup S. Diberikan semigrup S. Subhimpunan fuzzy tak kosong f pada S merupakan ideal kiri (kanan) fuzzy jika dan hanya jika $f(xy) \geq f(y)$ $(f(xy) \geq f(x))$ untuk setiap $x, y \in S$. Semigrup S dapat dipandang sebagai subhimpunan fuzzy atas dirinya sendiri dan ditulis $S = C_S$ yaitu $S(x) = 1$ untuk setiap $x \in S$.

Diberikan semigrup S. Jika f subhimpunan fuzzy tak kosong pada S, maka $C_S \circ f (f \circ C_S)$ merupakan ideal kiri (kanan) fuzzy pada S. Dan jika f ideal kanan (kiri) fuzzy pada S, maka $f \cup (C_S \circ f)$ $(f \cup (f \circ C_S))$ merupakan ideal pada S.

Lemma 2.2. *Diberikan semigrup S dan subhimpunan fuzzy f, g dan h pada S. Maka pernyataan berikut benar.*

1. $f \cup (g \cap h) = (f \cup g) \cap (f \cup h)$
2. $f \cap (g \cup h) = (f \cap g) \cup (f \cap h)$.

Lemma 2.3. *Diberikan semigrup S dan subhimpunan fuzzy f,g dan h pada S. Maka pernyataan berikut benar.*

1. $f \circ (g \cup h) = (f \circ g) \cup (foh)$,
   $(g \cup h) \circ f = (g \circ f) \cup (h \circ f)$
2. $f \circ (g \cap h) \subseteq (f \circ g) \cap (f \circ h)$,
   $(g \cap h) \circ f \subseteq (g \circ f) \cap (h \circ f)$.

Lemma 2.4. *Diberikan semigrup S dan subhimpunan fuzzy f, g dan h pada S. Jika $f \subseteq g$ maka $f \circ h \subseteq g \circ h$ dan $h \circ f \subseteq h \circ g$.*

Definisi 2.5. *Diberikan semigrup S. Subhimpunan fuzzy f disebut subsemigrup fuzzy jika $f \circ f \subseteq f$.*

Berikut diberikan karakteristik dari subsemigrup fuzzy pada sebarang semigrup.

Lemma 2.6. *Diberikan semigrup S. Subhimpunan fuzzy f pada semigrup S merupakan subsemigrup fuzzy jika dan hanya jika $f(xy) \geq f(x) \wedge f(y)$ untuk setiap $x, y \in S$.*

Diberikan definisi mengenai ideal fuzzy pada semigrup S, sebagai berikut.

Definisi 2.7. *Diberikan semigrup S. Subhimpunan fuzzy tak kosong f disebut ideal kiri (kanan) fuzzy pada S jika $C_S \circ f \subseteq f (f \circ C_S \subseteq f)$. Selanjutnya f disebut ideal fuzzy jika f ideal kiri dan kanan fuzzy.*

Selanjutnya diberikan karakteristik suatu ideal fuzzy pada semigrup S.

Lemma 2.8. *Diberikan semigrup S. Subhimpunan fuzzy tak kosong f pada S merupakan ideal kiri (kanan) fuzzy jika dan hanya jika $f(xy) \geq f(y)$ $(f(xy) \geq f(x))$ untuk setiap $x, y \in S$.*

Semigrup S dapat dipandang sebagai subhimpunan fuzzy atas dirinya sendiri dan ditulis $S = C_S$ yaitu $S(x) = 1$ untuk setiap $x \in S$.

Lemma 2.9. *Diberikan semigrup S dan A himpunan tak kosong dengan $A \subseteq S$. Maka pernyataan berikut benar :*

1. *A subsemigrup S jika dan hanya jika C_A subsemigrup fuzzy S.*
2. *A ideal kiri (ideal kanan, ideal) S jika dan hanya jika C_A ideal kiri (ideal kanan, ideal) fuzzy S.*

Lemma 2.10. *Diberikan semigrup S. Jika f subhimpunan fuzzy tak kosong pada S, maka $C_S \circ f (f \circ C_S)$ merupakan ideal kiri (kanan) fuzzy pada S.*

Lemma 2.11. *Diberikan semigrup S. Jika f ideal kanan (atau kiri) fuzzy pada S, maka $f \cup (C_S \circ f)$ (atau $f \cup (f \circ C_S)$) merupakan ideal pada S.*

Lemma 2.12. *Diberikan semigrup S. Jika μ dan λ ideal fuzzy pada S, maka $\mu \cap \lambda$ dan $\mu \cup \lambda$ merupakan ideal fuzzy pada S.*

Bukti. Diketahui μ, λ ideal fuzzy, akan ditunjukkan $C_S \circ (\mu \cap \lambda) \subseteq \mu \cap \lambda$ dan $(\mu \cap \lambda) \circ C_S \subseteq \mu \cap \lambda$. Dari Lemma 2.2 dan karena μ, λ ideal kiri fuzzy, diperoleh $C_S \circ (\mu \cap \lambda) \subseteq (C_S \circ \mu) \cap (C_S \circ \lambda) \subseteq \mu \cap \lambda$. Dengan kata lain $\mu \cap \lambda$ ideal kiri fuzzy. Selanjutnya, karena $\mu \cap \lambda$ ideal kanan fuzzy, maka diperoleh dan $(\mu \cap \lambda) \circ C_S \subseteq (\mu \circ C_S) \cap (\lambda \circ C_S) \subseteq \mu \cap \lambda$ dengan kata lain $\mu \cap \lambda$ ideal kanan fuzzy. Jadi $\mu \cap \lambda$ ideal fuzzy. Dengan cara yang sama, diperoleh $\mu \cap \lambda$ ideal fuzzy. ■

Lemma 2.13. *Diberikan semigrup S. Jika μ dan λ ideal fuzzy pada S, maka $\mu o \lambda$ merupakan ideal fuzzy pada S dan $\mu o \lambda \subseteq \mu \cap \lambda$.*

Bukti. Diketahui μ, λ ideal fuzzy pada S. Pertama akan dibuktikan $\mu \circ \lambda$ ideal fuzzy yaitu ekuivalen dengan menunjukkan $C_S \circ (\mu \circ \lambda) \subseteq \mu \circ \lambda$ dan $(\mu \circ \lambda) \circ C_S \subseteq \mu \circ \lambda$. Karena operasi $\circ$ bersifat asosiatif dan μ ideal kiri fuzzy serta λ ideal kanan fuzzy, maka $C_S \circ (\mu \circ \lambda) = (C_S \circ \mu) \circ \lambda \subseteq \mu \circ \lambda$ dan $(\mu \circ \lambda) \circ C_S = \mu \circ (\lambda \circ C_S) \subseteq \mu \circ \lambda$. Jadi $\mu \circ \lambda$ merupakan ideal fuzzy.

Selanjutnya akan dibuktikan $\mu \circ \lambda \subseteq \mu \cap \lambda$. Ambil sebarang $x \in S$ sedemikian hingga $x = ab$. Karena μ ideal kanan fuzzy dan λ ideal kiri fuzzy, diperoleh

$$\begin{aligned} \mu \circ \lambda(x) &= \vee_{x=ab}\, \mu(a) \wedge \lambda(b) \\ &\leq \vee_{x=ab}\, \mu(ab) \wedge \lambda(ab) \end{aligned}$$

$$= \mu(x) \wedge \lambda(x)$$
$$= (\mu \cap \lambda)(x).$$

Jadi, $\mu \circ \lambda \subseteq \mu \cap \lambda$. ■

2.3. Titik Fuzzy

Lemma 2.14 *Diberikan semigrup S. Jika $A, B \subseteq S$, maka untuk sebarang $t \in (0,1]$, berlaku pernyataan berikut.*

1. $tC_A \circ tC_B = tC_{AB}$.
2. $tC_A \cap tC_B = tC_{A\cap B}$.
3. $tC_A = \bigcup_{a\in A} a_t$.
4. $S \circ tC_A = tC_{SA}$.
5. *Jika A ideal (ideal kanan, ideal kiri) di S, maka tC_A adalah ideal fuzzy (ideal kanan fuzzy, ideal kiri fuzzy) pada S.*

Misal diberikan subhimpunan fuzzy f pada S, irisan dari semua ideal-ideal fuzzy pada S yang memuat f dinotasikan $\langle f\rangle$ dan jelas $\langle f\rangle$ merupakan ideal fuzzy pada S. Selanjutnya $\langle f\rangle$ disebut ideal fuzzy yang dibangun oleh f yaitu $\langle f\rangle = f \cup (S \circ f) \cup (f \circ S) \cup (S \circ f \circ S)$.

Lemma 2.15 *Diberikan semigrup S. Untuk sebarang $x, y \in S$, berlaku*
$\langle x\rangle\langle y\rangle \subseteq xy \cup xyS \cup xSy \cup Sxy \cup SxyS \cup SxSy \cup SxSyS$.

3. Ideal Semiprima Fuzzy

Definisi 3.1 *Diberikan semigrup S. Ideal fuzzy f pada semigrup S disebut ideal semiprima fuzzy pada S jika untuk setiap ideal fuzzy g pada S yang memenuhi $g \circ g \subseteq f$ berakibat $g \subseteq f$.*

Contoh 3.2 Diberikan semigrup $S = \{a, b, c\}$ terhadap operasi $*$ yang didefinisikan sebagai berikut :

$*$	a	b	c
a	a	c	a
b	c	b	b
c	a	b	c

Didefinisikan $f(x) = 0.5$ untuk setiap $x \in S$. Jelas bahwa f merupakan ideal fuzzy. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa f merupakan ideal semiprima fuzzy. Ambil sebarang g ideal fuzzy sedemikian hingga $g \circ g \subseteq f$. Andaikan $g \nsubseteq f$, artinya terdapat $x_0 \in S$ sedemikian hingga $g(x_0) > f(x_0) = 0.5$. Perhatikan bahwa
$(g \circ g)(x_0x_0) = \bigvee_{x_0x_0=aa}(g(a) \wedge g(a))$
$$\geq g(a) \wedge g(a) > 0.5$$

Di lain pihak,
$(g \circ g)(x_0x_0) = \bigvee_{x_0x_0=aa}\big(g(a) \wedge g(a)\big)$
$$\leq f(x_0x_0) = 0.5$$

Hal ini tidak mungkin, jadi haruslah $g \subseteq f$. Dengan kata lain f.ideal semiprima fuzzy. ■

Definisi 3.3. *Diberikan semigrup S. Ideal fuzzy f pada semigrup S disebut ideal semiprima lemah lengkap fuzzy pada S jika $f(x) \geq f(x^2)$ untuk setiap $x \in S$.*

Teorema 3.4. *Jika f subsemigrup fuzzy pada \$S\$, maka f merupakan ideal semiprima lemah lengkap fuzzy jika dan hanya jika $f(x) = f(x^2)$ untuk setiap $x \in S$.*

Bukti. ($\Rightarrow$)Jelas berlaku berdasarkan Definisi 3.3.
($\Leftarrow$)Asusmsikan f ideal semiprima lemah lengkap fuzzy. Ambil sebarang $a \in S$, karena f subsemigrup fuzzy pada S, didapat
$$f(a) \geq f(aa) \geq min\{f(a), f(a)\} = f(a)$$
Oleh karena itu diperoleh $f(a) \leq f(a^2)$ dan disisi lain diperoleh $f(a^2) \leq f(a)$. Jadi, $f(a^2) = f(a)$. ■

Toerema 3.5. *Diberikan S semigrup. Jika f ideal kanan fuzzy pada S adalah ideal quasi-semiprima fuzzy jika dan hanya jika $f(a) = \inf f(aSa)$ untuk setiap $a \in S$.*

Bukti. . ($\Rightarrow$) Misal g ideal kanan fuzzy pada S sedemikian hingga $g \circ g \subseteq f$. Jika $g \nsubseteq f$ maka terdapat $a \in S$ sedemikian hingga $f(a) < g(a)$. Karena $f(a) = inf\, f(aSa)$, maka terdapat $b \in S$ sedemikian hingga $f(a) = f(aba) < g(a)$. Karena g ideal kanan fuzzy pada S, diperoleh
$$\begin{aligned} g(a) > f(aba) &\geq (g \circ g)(aba) \\ &= sup_{xy=aba}[\min\{g(x), g(y)\}] \\ &\geq \min\{g(ab), g(a)\} \\ &= g(a) \end{aligned}$$
Sehingga didapat $g(a) < g(a)$. Hal ini kontradiksi. Jadi, haruslah $g \subseteq f$.
($\Leftarrow$) Andaikan $f(a) \neq inf\, f(aSa)$ untuk suatu $a \in S$. Karena $f$adalah ideal kanan fuzzy pada S berakibat $f(a) \leq f(aba) = f(a(ba))$ untuk setiap $b \in S$, sehingga didapat $f(a) < \inf f(aSa)$. Misal $\inf f(aSa) = m$ dan g adalah subhimpunan fuzzy pada S sedemikian hingga $g(x) = m$ jika $x \in aS$ dan 0 untuk lainnya. Atau dapat ditulis sebagai berikut
$$g(x) = \begin{cases} m & , x \in aS \\ 0, & lainnya. \end{cases}$$

Sehingga berdasarkan Lemma 2.14 (5), g adalah ideal kanan fuzzy pada S. Jika $(g \circ g)(x) = m$, maka $m =$

$sup_{x=yz}[\min\{Q(y),Q(z)\}]$. Hal ini berarti terdapat suatu $u,v \in aS$ sedemikian hingga $uv = x$, misal pilih $u = at$ dan $v = aq$. Karena f ideal kanan fuzzy, diperoleh

$$\begin{aligned} f(x) &= f(uv) \\ &= f(ataq) \\ &\geq f(ata) \\ &\geq \inf(f(aSa)) \\ &= m = g(x) \end{aligned}$$

Oleh karena itu, didapat $g \subseteq f$. Selanjutnya pilih h himpunan fuzzy pada S sedemikian hingga $h(x) = m$ jika $x \in aS^1$, dan 0 untuk lainnya. Atau dapat ditulis sebagai berikut

$$h(x) = \begin{cases} m, & x \in aS^1 \\ 0, & lainnya. \end{cases}$$

Sehingga berdasarkan Lemma 2.14 (5) berakibat h himpunan ideal kanan fuzzy pada S. Perhatikan,

$$(g \circ g)(x) = sup_{x=yz}\left[\min\{h(y),h(z)\}\right] = m$$

untuk $y,z \in aS^1$. Pilih $y = ai$, $z = aj$ untuk $i,j \in aS^1$, didpat $x = yz = aiaj \in aS$. Oleh karena itu, $(h \circ h)(x)$ berakibat $g(x) = g(yz) = g(aiaj) = m$. Oleh karena itu, $h \circ h \subseteq g \subseteq f$ dan karena f quasi-semiprima, diperoleh $h \subseteq g$. Sehingga didapat $m = h(a) \leq f(a) < \inf f(aSa) = m$ atau dengan kata lain $m < m$. Hal ini kontradiksi. Jadi haruslah $f(a) = \inf f(aSa)$. ■

Karena Teorema 3.5 juga berlaku untuk ideal kiri fuzzy serta ideal kiri-kanan fuzzy, sehingga diperoleh akibat di bawah ini

Akibat 3.6. Diberikan S semigrup dan f ideal fuzzy pada S. Maka f ideal fuzzy semiprima jika dan hanya jika $f(a) = \inf f(aSa)$.

Akibat 3.7. Diberikan S semigrup. Jika f ideal semiprima lemah lengkap fuzzy pada S, maka f ideal semiprima fuzzy pada S.

Bukti. Ambil sebarang $a \in S$. Karena f ideal semiprima lemah lengkap fuzzy pada S, berdasarkan Teorema 3.4 berakibat $f(a) = f(aa)$. Perhatikan,

$$f(a) = f(aa) = f(aaaa) \geq \inf f(aSa) \geq f(a)$$

Berdasarkan definisi ideal semiprima fuzzy, dapat disimpulkan bahwa f ideal semiprima fuzzy pada S. ■

Kebalikan dari Akibat 3.7 di semigrup S pada umumnya tidak berlaku. Akibat 3.7 akan berlaku dua arah jika diberikan syarat bahwa semigrup S merupakan semigrup komutatif.

Contoh 3.8. Diberikan semigrup $S = \{a,b,c,d\}$ dan operasi $*$ yang didefinisikan sebagai berikut.

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	c	b	d	d
c	c	c	c	c
d	c	c	c	c

Dengan definisi subhimpunan fuzzy $f : S \longrightarrow [0,1]$ sebagai berikut $f(a) = f(b) = 0{,}3$, $f(c) = 0{,}4$, dan $f(d) = 0{,}5$. Dengan menggunakan Definisi 2.7 dapat ditunjukkan bahwa f merupakan ideal fuzzy pada S. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa f ideal semiprima fuzzy tetapi bukan merupakan ideal semiprima lemah lengkap fuzzy.

Ambil sebarang g ideal fuzzy pada S sedemikian sehingga $g \circ g \subseteq f$. Andaikan $g \nsubseteq f$, artinya terdapat $x_0 \in S$ sedemikian hingga $g(x_0) > f(x_0)$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} (g \circ g)(x_0x_0) &= \vee_{x_0x_0=xx}(g(x) \wedge g(x)) \\ &\geq g(x) \wedge g(x) \\ &> f(x) \end{aligned}$$

untuk suatu $x \in S$. Di lain pihak,

$$(g \circ g)(x_0x_0) = \bigvee_{x_0x_0=xx} (g(x) \wedge g(x)) \leq f(x_0x_0)$$

Hal ini tidak mungkin, jadi haruslah $g \subseteq f$. Dengan kata lain, f ideal semiprima fuzzy.

Kemudian akan ditunjukkan bahwa f bukan merupakan ideal semiprima lemah lengkap fuzzy. Perhatikan bahwa,

$$f(a) = 0{,}3 \geq f(a^2) = f(aa) = f(a) = 0{,}3$$
$$f(b) = 0{,}3 \geq f(b^2) = f(bb) = f(b) = 0{,}3$$
$$f(c) = 0{,}5 \geq f(c^2) = f(cc) = f(c) = 0{,}5$$
$$f(d) = 0{,}4 \geq f(d^2) = f(dd) = f(c) = 0{,}5$$

Karena $f(x) \ngeq f(x^2)$ untuk setiap $x \in S$, sehingga berdasarkan Definisi 3.3 berakibat f bukan ideal semiprima lemah lengkap fuzzy pada S. ■

Akibat3.9. Diberikan S semigrup komutatif. Ideal fuzzy f adalah semiprima fuzzy pada S jika dan hanya jika f merupakan ideal semiprima lemah lengkap fuzzy pada S.

Bukti. Bukti dari arah kanan ke kiri dapat dilihat pada Akibat 3.7. Selanjutnya berdasarkan Teorema 3.4, untuk membuktikan f ideal semiprima lemah lengkap fuzzy pada S cukup menunjukkan bahwa berlaku $f(a) = f(aa)$ untuk setiap $a \in S$. Misal f ideal semiprima fuzzy pada semigrup komutatif S. Andaikan $f(a) \neq f(aa)$ untuk suatu $a \in S$, berakibat $f(aa) > f(a)$. Karena f ideal semiprima fuzzy berkibat $f(a) = \inf f(aSa)$ untuk setiap

$a \in S$. Sehingga diperoleh $f(aa) > f(aSa)$. Oleh karena itu terdapat $t \in S$ sedemikian hingga $f(aa) > f(ata) = f(aat)$. Akan tetapi hal ini kontradiksi dengan fakta bahwa f ideal fuzzy. Jadi, haruslah $f(a) = f(aa)$ untuk setiap $a \in S$. ■

UCAPAN TERIMA KASIH

Terimakasih kepada LPPM (Lembaga Penelitian dan Pengabdian Masyarakat) STMIK Bumi Gora Mataram, yang dalam hal ini telah memberikan dana penelitian sehingga penelitian ini berjalan lancar.

DAFTAR PUSTAKA

Abdurahim, 2017, Ideal Prima Fuzzy di Semigrup S, *Jurnal Silogisme*, 46-55.

Ahsan, J., dkk, 1995, Semigroups Characterized by Their Fuzzy Ideals, *Fuzzy Systems and Mathematics*, 29-32.

Howie, J.M., 1995, *Fundamentals of Semigroup Theory*, Oxford Science Publication.

Kim, J., 2009, Some Fuzzy Semiprime Ideals of Semigroups, *Journal of The Chungcheong Mathematical Society*, 22, 459-466.

Kuroki, N., 1991, On Fuzzy Semigroups, *Information Sciences*, 53, 203-236.

Mordeson, J.N., dkk, 2003, *Fuzzy Semigroups*, Springer-Verlag, Heiderberg.

Rosenfeld, A., 1979, Fuzzy Groups, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 35, 512-517.

Zadeh, L.A., 1965, Fuzzy Sets, *Information and Control*, 8, 338-353.