Volume 03 No 01 Juni (2020)

e-ISSN: **2615-3270**

p-ISSN: **2615-3599**

Eigen Mathematics Journal

Homepage jurnal: http://eigen.unram.ac.id

SIFAT-SIFAT GRAF PEMBAGI NOL PADA GELANGGANG $\frac{\mathbb{Z}_p[x]}{\langle x^{n+1}\rangle} \times \frac{\mathbb{Z}_q[x]}{\langle x^{n+1}\rangle}$

Daisyah Alifian Fatahillah[1], Ni Wayan Switrayni[2]

[1] Universitas Mataram, Jl.Majapahit 62, Mataram, 83125, Indonesia, Email: daisfahillah2@gmail.com
[2] Universitas Mataram, Jl.Majapahit 62, Mataram, 83125, Indonesia, Email: niwayan.switrayni@unram.ac.id

A B S T R A C T

Zero-divisor graph $\mathbb{G}$ is an undirected graph whose vertices are zero-divisors of a commutative ring and the edges defined as $(x, y) \epsilon E(\mathbb{G})$ if and only if $x.y = 0$. Wicaksono (2013) gave some characteristics of zero-divisor graph of the modularly integer ring. This research aims to represent the zero-divisor elements of the ring $\frac{\mathbb{Z}_p[x]}{\langle x^{n+1}\rangle} \times \frac{\mathbb{Z}_q[x]}{\langle x^{n+1}\rangle}$, where p, q are prime numbers and $n \epsilon \mathbb{N}$ into a graph called the zero-divisor graph $\mathbb{G}$. The method used in this research is a deductive method. The result shows that the zero-divisor graph obtained from ring $\frac{\mathbb{Z}_p[x]}{\langle x^{n+1}\rangle} \times \frac{\mathbb{Z}_q[x]}{\langle x^{n+1}\rangle}$ is complete bipartit graph $\mathbb{G}_{(p^{n+1}-1),(q^{n+1}-1)}$ with some characteristics related to its girth, eccentricity, radius and diameter.

Keywords: polynomial ring, zero-divisor, girth, eccentricity, radius, diameter.

A B S T R A K

Graf pembagi nol $\mathbb{G}$ merupakan graf yang simpul-simpulnya berupa elemen pembagi nol dari suatu gelanggang komutatif dan sisi-sisinya merupakan relasi pembagi nol yang didefinisikan sebagai $(x, y) \epsilon E(\mathbb{G})$ jika dan hanya jika $x.y = 0$. Dalam penelitiannya, Wicaksono (2013) telah memberikan sifat-sifat graf pembagi nol pada gelanggang bilangan bulat modulo. Oleh karena itu, Penelitian ini bertujuan merepresentasikan unsur-unsur pembagi nol pada gelanggang yang lebih kompleks atau gelanggang $\frac{\mathbb{Z}_p[x]}{\langle x^{n+1}\rangle} \times \frac{\mathbb{Z}_q[x]}{\langle x^{n+1}\rangle}$, dimana p, q bilangan prima dan $n \epsilon \mathbb{N}$ menjadi suatu graf yang disebut graf pembagi nol $\mathbb{G}$. Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah

* Corresponding author.
Alamat e-mail: niwayan.switrayni@unram.ac.id

metode *Deductive Proof*. Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa graf pembagi nol yang terbentuk dari gelanggang $\frac{\mathbb{Z}_p[x]}{\langle x^{n+1}\rangle} \times \frac{\mathbb{Z}_q[x]}{\langle x^{n+1}\rangle}$ adalah graf bipartit lengkap $\mathbb{G}_{(p^{n+1}-1),(q^{n+1}-1)}$ dengan bebereapa sifat terkait yaitu girth, eksentrisitas, radius dan diameter.

Kata kunci: gelanggang., graf pembagi nol., *eksentrisitas.*, *grith.*, radius., diameter., graf bipartit.

Diserahkan: 27-12-2019; Diterima: 27-05-2020; Doi: 10.29303/emj.v3i1.51

1. PENDAHULUAN

Graf merupakan pasangan suatu himpunan yang dinotasikan $\mathbb{G}(V, E)$, dimana V himpunan simpul (titik) yang bukan himpunan kosong, dan E merupakan himpunan sisi (garis) yang menghubungkan simpul-simpul (titik), dimana E boleh himpunan kosong. Penelitian kali ini penulis ingin merepresentasikan suatu gelanggang $\frac{\mathbb{Z}_p[x]}{\langle x^{n+1}\rangle} \times \frac{\mathbb{Z}_q[x]}{\langle x^{n+1}\rangle}$ menjadi suatu jenis graf yang disebut graf pembagi nol yang disimbolkan dengan $\mathbb{G}$. Himpunan simpul dari graf pembagi nol ditentukan dari anggota pembagi nol dari gelanggang $\frac{\mathbb{Z}_p[x]}{\langle x^{n+1}\rangle} \times \frac{\mathbb{Z}_q[x]}{\langle x^{n+1}\rangle}$ dan sisinya ditentukan dari relasi pembagi nol yaitu $(x, y)\epsilon E(\mathbb{G})$ jika dan hanya jika $x.y = 0$. Sebelum memasuki pembahasan pada penelitian ini diberikan beberapa definisi pendukung, diantaranya:

2. TINJAUAN PUSTAKA

Definisi 1.1 (Dummit dan Foote, 2004)

Suatu himpunan tak kosong R dengan dua operasi biner yaitu penjumlahan $(+)$ dan perkalian $(\times)$ dinamakan gelanggang jika memenuhi beberapa aksioma berikut:

a. $(R, +)$ merupakan grup komutatif
b. Operasi $(\times)$ bersifat asosiatif, yakni $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ untuk setiap $a, b, c \in R$
c. Hukum distributif berlaku pada R, yakni untuk setiap $a, b, c \in R$ berlaku $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$ dan $(a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c)$.

Himpunan bilangan bulat merupakan salah satu contoh dari suatu gelanggang.

Beberapa kasus, terdapat gelanggang yang tidak mempunyai unsur pembagi nol (*zero devisor*). Gelanggang yang tidak mempunyai unsur pembagi nol disebut daerah integral, dimana definisi daerah integral diberikan secara formal sebagai berikut.

Definisi 1.2 (Fraleigh, 2014)

Misalkan R adalah gelanggang. Suatu elemen tak nol $a \in R$ disebut elemen pembagi nol jika terdapat suatu unsur tak nol $b \in R$ sehingga $ab = 0$ atau $ba = 0$. Himpunan semua pembagi nol dari gelanggang R disimbolkan dengan $Z(R)$. Gelanggang yang tidak memiliki elemen pembagi nol disebut daerah integral.

Salah satu contoh gelanggang yang tidak memuat unsur pembagi nol adalah himpunan bilangan bulat, sehingga himpunan bilangan bulat disebut sebuah daerah integral.

Definisi 1.3 (Rotman, 2005)

Jika R gelanggang komutatif maka suatu barisan di R merupakan suatu fungsi $\sigma: \mathbb{N} \to R$.

Secara tidak langsung, ekpresi $s_0 + s_1x + s_2x^2 + \cdots + s_nx^n$ berkorespondensi dengan barisan $(s_0, s_1, s_2, \dots, s_n, 0, 0, 0, \dots,)$, untuk $i\epsilon\mathbb{N}$, dimana $\sigma(i) = s_i\epsilon R$, sedemikian $\sigma = (s_0, s_1, s_2, \dots, s_i, \dots)$, dimana s_i koefesien dari barisan.

Himpunan setiap polinom dengan koefesiennya merupakan anggota dari R dapat dinotasikan sebagai $R[x]$. Contoh gelanggang polinom yaitu $\mathbb{Z}_3[x]$, dimana $\mathbb{Z}_3[x]$ merupakan gelanggang polinom dengan koefesiennya bilangan bulat modulo.

Definisi 1.4 (Munir, 2010)

Graf $\mathbb{G}$ didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E), yang dinotasikan $\mathbb{G}(V, E)$ dimana V merupakan himpunan tak kosong dari simpul-simpul dan E merupakan himpunan sisi yang menghubungkan simpul satu ke simpul lainnya.

Definisi 1.5 (Munir, 2010)

Graf sederhana merupakan graf yang tidak mengandung sisi ganda atau *loop.*

Definisi 1.6 (Munir, 2010)
Graf $\mathbb{G}$ yang himpunan simpulnya dapat dipartisi menjadi dua himpunan bagian V_1 dan V_2, sedemikian sehingga setiap sisi di dalam $\mathbb{G}$ menghubungkan sebuah simpul di V_1 ke sebuah simpul di V_2 disebut graf bipartit dan dinyatakan sebagai $\mathbb{G}(V_1, V_2)$. Jika setiap simpul di V_1 dan V_2 saling terhubung maka graf tersebut disebut graf bipartit lengkap.

Graf bipartit mempunyai karakteristik berupa *girth*, eksentrisitas, diameter, dan radius, dimana karakteristik tersebut didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 1.7 (Robin, 2010)

Girth merupakan panjang *cycle* minimum yang dimiliki suatu graf.

Definisi 1.8 (Abdussakir, 2009)

Jarak $e(u, v)$ antara dua simpul u dan v pada graf G adalah panjang lintasan terpendek dari simpul u ke v. Eksentrisitas $ec(v)$ pada sebuah titik v dalam graf G adalah jarak maksimum dari simpul v ke setiap simpul di G. Radius $r(G)$ dari G adalah eksentrisitas minimum pada setiap simpul di G, sedangkan diameter dari G dinotasikan $dia(G)$ adalah eksentrisitas maksimum pada setiap simpul di G.

Teorema 1.1 (Dummit dan Foote, 2004)
Jika D suatu daerah integral, maka:
1. $D[x]$ adalah suatu daerah integral.
2. Elemen *unit* dari $D[x]$ juga merupakan elemen *unit* dari D.

Bukti:
1. Jika $f(x) \neq 0$ dan $g(x) \neq 0$, maka
$\deg\big(f(x)g(x)\big) = \deg\big(f(x)\big) + \deg\,(g(x)) \geq 0.$
Sehingga diperoleh $f(x)g(x) \neq 0$ atau $f(x)$ dan $g(x)$ bukan pembagi nol pada D[x].
2. Misalkan $f(x), g(x) \epsilon D[x]$, Jika $f(x)g(x) = 1$ maka
$\deg\big(f(x)g(x)\big) = \deg\big(f(x)\big) + \deg\big(g(x)\big) = \deg(1) = 0$

Diperoleh $f(x)$ dan $g(x)$ adalah polinomial berderajat nol. Akibatnya Akibatnya $f(x), g(x)$ unit di D. Jadi, unit di $D[x]$ tidak lain adalah unit di D.

3. TUJUAN

Penulis ingin mencari hubungan suatu gelanggang $\frac{\mathbb{Z}_p[x]}{\langle x^{n+1}\rangle} \times \frac{\mathbb{Z}_q[x]}{\langle x^{n+1}\rangle}$ dengan jenis-jenis graf yang telah diketahui, sehingga dari hubungan gelanggang $\frac{\mathbb{Z}_p[x]}{\langle x^{n+1}\rangle} \times \frac{\mathbb{Z}_q[x]}{\langle x^{n+1}\rangle}$ dengan jenis-jenis graf, penulis dapat mencari sifat-sifat dari graf pembagi nol $\mathbb{G}$.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Gelanggang $\frac{\mathbb{Z}_n[x]}{\langle x^{n+1}\rangle}$ pada umumnya didefinisikan sebagai $\frac{\mathbb{Z}_n[x]}{\langle x^{n+1}\rangle} = \{(a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n) + \langle x^{n+1}\rangle | a_0, a_1, \dots, a_n \epsilon \mathbb{Z}_n\}$, tetapi pada penelitian ini elemen $(a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n) + \langle x^{n+1}\rangle$ dari gelanggang $\frac{\mathbb{Z}_n[x]}{\langle x^{n+1}\rangle}$ dituliskan sebagai $a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$.

Berdasarkan penjabaran dari beberapa definisi dan teorema yang telah diberikan, bahwa definisi pembagi nol pada gelanggang polinom dapat direpresentasikan menjadi jenis graf yang disebut graf pembagi nol.

Gelanggang $\mathbb{Z}_p$ dan $\mathbb{Z}_q$ tidak memiliki elemen pembagi nol karena merupakan daerah integral menurut teorema 1.1,akibatnya gelanggang polinom $\frac{\mathbb{Z}_p[x]}{\langle x^{n+1}\rangle}$ dan $\frac{\mathbb{Z}_q[x]}{\langle x^{n+1}\rangle}$ tidak mempunyai unsur pembagi nol. Untuk l bilangan komposit, l dapat dinyatakan sebagai $l = {p_1}^{k_1}{p_2}^{k_2} \dots {p_j}^{k_j}$, $p_1, p_2, \dots, p_j$ bilangan prima yang berbeda dan $k_1, k_2, \dots, k_j \in N$, maka gelanggang $\frac{\mathbb{Z}_l[x]}{\langle x^{n+1}\rangle}$ memiliki elemen pembagi nol.

Diberikan contoh jika l komposit:
Diberikan gelanggang polinom kuosien $\frac{\mathbb{Z}_6[x]}{\langle x^{n+1}\rangle}$ suatu gelanggang kuosien, maka $\frac{\mathbb{Z}_6[x]}{\langle x^{n+1}\rangle} =$ $\{0, 1, 2,3,4,5, x, x + 1, x + 2, x + 3, x +$

$4, x{+}5, \dots, 5x^n + 5x^{n-1} + \cdots + 5x + 5\}$, sehingga $\frac{\mathbb{Z}_6[x]}{\langle x^{n+1}\rangle}$ memiliki unsur pembagi nol yaitu:

- $(2).(3) = 0$
- $(2).(3x+3) = 0$
- $(3).(2x+2) = 0$
- $(3).(4x+4) = 0$
- $(4)(3x+3) = 0$
- … … … … … … …
- $(4)(3x^n + 3x^{n-1} + \cdots + 3x + 3) = 0$

Misalkan p, q merupakan $bilangan\ prima$:
Diberikan gelanggang polinom kuosien $\frac{\mathbb{Z}_2[x]}{\langle x^{n+1}\rangle} \times \frac{\mathbb{Z}_3[x]}{\langle x^{n+1}\rangle}$ dimana anggota dari $\frac{\mathbb{Z}_2[x]}{\langle x^{n+1}\rangle} = \{0,1,x,x+1,\dots,x^n + x^{n-1} + \cdots + x + 1\}$ dan anggota dari $\frac{\mathbb{Z}_3[x]}{\langle x^{n+1}\rangle} = \{0,1,2,x,x+1,x+2,2x,2x+1,2x+2,\dots,2x^n + 2x^{n-1} + \cdots + 2x + 2\}$, sehingga $\left|\frac{\mathbb{Z}_2[x]}{\langle x^{n+1}\rangle} \times \frac{\mathbb{Z}_3[x]}{\langle x^{n+1}\rangle}\right| = \{(0,0); (0,1)\ ; (0,2)\ ; (0,x)\ ; (0,x+1); (0,x+2); (0,2x); (0,2x+1); (0,2x+2); (1,0); (1,1); (1,2); (1,x); (1,x+1); (1,x+2); (1,2x); (1,2x+1); (1,2x+2); (x,0); (x,1); (x,2); (x,x); (x,x+1); (x,x+2); (x,2x); (x,2x+1); (x,2x+2); (x+1,0); (x+1,1); (x+1,2); (x+1,x); (x+1,x+1); (x+1,x+2); (x+1,2x); (x+1,2x+1); (x+1,2x+2); \dots; (x^n + x^{n-1} + \cdots + x + 1, 2x^n + 2x^{n-1} + \cdots + 2x + 2)\}$

Identifikasi unsur pembagi nol:

- $(1,0).(0,1) = 0$
- $(1,0).(0,2) = 0$
- $(1,0).(0,x) = 0$
- $(1,0).(0,x+1) = 0$
- $(1,0).(0,x+2) = 0$
- $(1,0).(0,2x+1) = 0$
- $(0,1).(0,2x+2) = 0$
- $(x,0).(0,1) = 0$
- $(x,0).(0,2) = 0$
- $(x,0).(0,x) = 0$
- $(x,0).(0,x+1) = 0$
- $(x,0).(0,x+2) = 0$
- $(x,0).(0,2x+1) = 0$
- $(x,1).(0,2x+2) = 0$
- $(x+1,0).(0,1) = 0$
- $(x+1,0).(0,2) = 0$
- $(x+1,0).(0,x) = 0$
- $(x+1,0).(0,x+1) = 0$
- $(x+1,0).(0,x+2) = 0$
- $(x+1,0).(0,2x+1) = 0$
- $(x+1,0).(0,2x+2) = 0$
- … … … … … … … ….
- $(x^n + x^{n-1} + \cdots + x + 1,0).(0,2x^n + 2x^{n-1} + \cdots + 2x + 2) = 0$

Jadi graf yang dibentuk merupakan graf bipartit lengkap, karena setiap simpul pada graf pembagi nol $\mathbb{G}$ dapat dipartisi menjadi V_1 dan V_2 dimana setiap simpul pada V_1 akan selalu terhubung dengan simpul pada V_2.

Teorema 1
Diberikan gelanggang $R = \frac{\mathbb{Z}_k[x]}{\langle x^{n+1}\rangle} \times \frac{\mathbb{Z}_l[x]}{\langle x^{n+1}\rangle}$, dimana $k, l, n \epsilon \mathbb{N}$ maka $\left|\frac{\mathbb{Z}_k[x]}{\langle x^{n+1}\rangle} \times \frac{\mathbb{Z}_l[x]}{\langle x^{n+1}\rangle}\right| = k^{n+1}.\, l^{n+1}$

Bukti:
Banyaknya polinom konstan pada gelanggang polinom kuosien $\frac{\mathbb{Z}_k[x]}{\langle x^{n+1}\rangle} = \frac{k!}{(k-1)!} = k.$

Banyaknya polinom berderajat 1 pada gelanggang polinom kuosien adalah $\frac{\mathbb{Z}_k[x]}{\langle x^{n+1}\rangle} = \frac{k!}{(k-2)!} = k(k-1) = k^2 - k.$

Banyaknya polinom berderajat 2 pada gelanggang polinom kuosien adalah $\frac{\mathbb{Z}_k[x]}{\langle x^{n+1}\rangle} = \frac{k!}{(k-2)!} k = k(k-1)k = k^3 - k^2.$

Sampai dengan banyaknya polinom berderajat n pada gelanggang polinom kuosien adalah $\frac{\mathbb{Z}_k[x]}{\langle x^{n+1}\rangle} = \frac{k!}{(k-2)!} k^{n-1} = k^{n+1} - k^n.$

akibatnya banyaknya anggota dari $\left|\frac{\mathbb{Z}_k[x]}{\langle x^{n+1}\rangle}\right| = (k) + (k^2 - k) + (k^3 - k^2) + \cdots + (k^{n+1} - k^n) = k^{n+1}.$

Dengan cara yang sama didapatkan $\left|\frac{\mathbb{Z}_l[x]}{\langle x^2\rangle}\right| = l + (l^2 - l) + (l^3 - l^2) + \cdots + (l^{n+1} - l^n) = l^{n+1}.$

Jadi $\left|\frac{\mathbb{Z}_k[x]}{\langle x^{n+1}\rangle} \times \frac{\mathbb{Z}_l[x]}{\langle x^{n+1}\rangle}\right| = k^{n+1}.\, l^{n+1}$

Teorema 2
Diberikan $R = \frac{\mathbb{Z}_p[x]}{\langle x^{n+1}\rangle} \times \frac{\mathbb{Z}_q[x]}{\langle x^{n+1}\rangle}$ suatu gelanggang dimana p, q bilangan prima maka graf yang dibentuk

adalah graf bipartit lengkap dengan $\mathbb{G}_{(p^{n+1}-1),(q^{n+1}-1)}$.

Bukti:
Diberikan gelanggang $R = \frac{\mathbb{Z}_p[x]}{\langle x^{n+1}\rangle} \times \frac{\mathbb{Z}_q[x]}{\langle x^{n+1}\rangle}$.
Didefinisikan himpunan pembagi nol dari gelanggang R yaitu $Z[R] = \Big\{(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n, 0)(0, b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n) | (a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n) \epsilon \frac{\mathbb{Z}_p[x]}{\langle x^{n+1}\rangle}\ dan\ (b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n) \epsilon \frac{\mathbb{Z}_q[x]}{\langle x^{n+1}\rangle}\Big\}$.
Sehingga V dapat dipartisi menjadi $V_1 = \{(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n, 0)) | a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \neq 0\ untuk\ a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \epsilon \frac{\mathbb{Z}_p[x]}{\langle x^{n+1}\rangle}\}$ dan $V_2 = \{(0, b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n) | b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n \neq 0\ untuk\ b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n \epsilon \frac{\mathbb{Z}_q[x]}{\langle x^{n+1}\rangle}\}$.

Ambil sebarang $\alpha \epsilon V_1$ dan $\beta \epsilon V_2$ akibatnya $\alpha.\beta = (a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n, 0).(0, b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n) = (0,0)$, Sehingga menurut definisi graf pembagi nol, bahwa setiap simpul pada V_1 akan terhubung dengan simpul pada V_2.

Karena $\mathbb{Z}_p$ dan $\mathbb{Z}_q$ merupakan daerah integral, akibatnya $\frac{\mathbb{Z}_p[x]}{\langle x^{n+1}\rangle}$ dan $\frac{\mathbb{Z}_q[x]}{\langle x^{n+1}\rangle}$ merupakan daerah integral.

Berakibat bahwa tidak terdapat sisi pada simpul-simpul untuk partisi yang sama, sehingga graf $\mathbb{G}(\frac{\mathbb{Z}_p[x]}{\langle x^{n+1}\rangle} \times \frac{\mathbb{Z}_q[x]}{\langle x^{n+1}\rangle})$ merupakan graf bipartit lengkap dengan $\mathbb{G}_{(p^n-1),(q^n-1)}$.

Akibat 1
Girth pada graf $\mathbb{G}_{(p^{n+1}-1),(q^{n+1}-1)}$ sama dengan 4.

Bukti:
Karena $\mathbb{G}_{(p^{n+1}-1),(q^{n+1}-1)}$ graf bipartit lengkap maka V dapat dipartisi menjadi V_1 dan V_2 dimana setiap simpul pada V_1 akan bertetangga dengan simpul pada V_2.

Ambil sebarang $v_i \epsilon V_1$ akibatnya $\exists v_j \epsilon V_2$ yang bertetangga dengan v_i. Karena $\mathbb{G}_{(p^{n+1}-1),(q^{n+1}-1)}$ merupakan graf bipartit lengkap, akibatnya v_j akan bertetangga dengan simpul pada V_1 misalkan v_{i+1}.

$\mathbb{G}_{(p^{n+1}-1),(q^{n+1}-1)}$ bipartit lengkap maka v_{i+1} akan bertetangga dengan $v_{j+1} \epsilon V_2$ sehingga v_{j+1} akan selalu bertetangga dengan v_i.

Perhatikan path berikut ini bahwa $v_i - v_j - v_{i+1} - v_{j+1} - v_i$ merupakan sebuah *cycle* dengan panjang minimal yang terdapat pada graf $\mathbb{G}_{(p^{n+1}-1),(q^{n+1}-1)}$.
Jadi terbukti bahwa $\mathbb{G}_{(p^{n+1}-1),(q^{n+1}-1)}$ mempunyai *girth* sama dengan 4.

Akibat 2
Eksentrisitas setiap simpul dari $\mathbb{G}_{(p^{n+1}-1)\prime(q^{n+1}-1)}$ sama dengan 2.

Bukti:
Karena $\mathbb{G}_{(p^{n+1}-1),(q^{n+1}-1)}$ graf biprtit lengkap maka V dapat dipartisi menjadi V_1 dan V_2 dimana setiap simpul pada V_1 akan bertetangga dengan simpul pada V_2.

Ambil sebarang $v_i \epsilon V_1$ akibatnya $\exists v_j \epsilon V_2$ dimana jarak dari v_i ke v_j sama dengan 1.

Karena $\mathbb{G}_{(p^{n+1}-1),(q^{n+1}-1)}$ merupakan graf bipartit maka v_j bertetangga dengan simpul pada $v_{i+1} \epsilon V_1$, akibatnya jarak maksimal yang terdapat pada $\mathbb{G}_{(p^{n+1}-1),(q^{n+1}-1)}$ dari v_i ke v_{i+1}adalah 2 untuk $i \epsilon \mathbb{N}$.

Jadi *eksentrisitas* dari $\mathbb{G}_{(p^{n+1}-1),(q^{n+1}-1)}$ sama dengan 2.

Akibat 3
Diameter dari $\mathbb{G}_{(p^{n+1}-1),(q^{n+1}-1)}$ sama dengan 2.

Bukti:
Karena *eksentrisitas* setiap simpul pada $\mathbb{G}_{(p^{n+1}-1),(q^{n+1}-1)}$ sama dengan 2, akibatnya menurut definisi diameter bahwa,
$\mathbb{G}_{(p^{n+1}-1),(q^{n+1}-1)}$ mempunyai eksentrisitas maksimum sama dengan 2.

Akibat 4
Radius dari $\mathbb{G}_{(p^{n+1}-1),(q^{n+1}-1)}$ sama dengan 2.

Bukti:
Karena *eksentrisitas* setiap simpul pada $\mathbb{G}_{(p^{n+1}-1),(q^{n+1}-1)}$ sama dengan 2, akibatnya menurut definisi radius bahwa, $\mathbb{G}_{(p^{n+1}-1),(q^{n+1}-1)}$ mempunyai eksentrisitas minimum sama dengan 2.

5. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan, dapat diambil kesimpulan mengenai beberapa sifat graf pembagi nol pada gelanggang $\frac{\mathbb{Z}_p[x]}{\langle x^{n+1}\rangle} \times \frac{\mathbb{Z}_q[x]}{\langle x^{n+1}\rangle}$ sebagai berikut:

1. Jika $p\ ,q\ \epsilon bilangan\ prima$, maka graf pembagi nol dari gelanggang $\frac{\mathbb{Z}_p[x]}{\langle x^{n+1}\rangle} \times \frac{\mathbb{Z}_q[x]}{\langle x^{n+1}\rangle}$ berbentuk graf bipartit lengkap $\mathbb{G}_{(p^{n+1}-1)(q^{n+1}-1)}$.
2. Jika diberikan sebarang gelanggang $\frac{\mathbb{Z}_k[x]}{\langle x^{n+1}\rangle} \times \frac{\mathbb{Z}_l[x]}{\langle x^{n+1}\rangle}$ maka banyaknya anggota dari gelanggang tersebut adalah $\left|\frac{\mathbb{Z}_k[x]}{\langle x^{n+1}\rangle} \times \frac{\mathbb{Z}_l[x]}{\langle x^{n+1}\rangle}\right| = k^n.l^n$.
3. Jika diberikan sebarang graf bipartit lengkap $\mathbb{G}_{(p^{n+1}-1)(q^{n+1}-1)}$ maka *girth* $\mathbb{G}_{(p^{n+1}-1),(q^{n+1}-1)} = 4$, eksentrisitas $\mathbb{G}_{(p^{n+1}-1),(q^{n+1}-1)} = 2$, radius $\mathbb{G}_{(p^{n+1}-1),(q^{n+1}-1)} = 2$, dan diameter $\mathbb{G}_{(p^{n+1}-1),(q^{n+1}-1)} = 2$.

Ucapan Terima Kasih

Dalam kesempatan ini penulis ingin menyampaikan ucapan terima kasih yang tak terhingga kepada:

1. Allah SWT yang selalu memberikan rahmat dan hidayah-Nya.
2. Kedua Orang tua beserta saudara-saudara tercinta, untuk segala yang telah diperjuangkan selama ini.
3. Bapak/ibu dosen khususnya para dosen pembimbing atas kesediaannya meluangkan waktu untuk memberikan bimbingan, arahan, dan bantuan tak terhingga kepada penulis, sehingga penelitian ini dapat terselesaikan.

DAFTAR PUSTAKA

Rotman, J. J, 2015, *A First Course In Abstract Algebra With Applications, Third Edition*. University of Illinois

Rosen, K, 1983, *Elementary Number Theory And Its Applications, ADSION-WESLEY Publishing Company.*

Fraleigh, J.B, 2013, *A First Course in Abstract Algebra* (7th ed). United Kingdom: Pearson Education Limited.

Dummit, S. D., & Foote, M. R. (2004). *Abstrac Algebra* (Third ed.). New York: John Wiley & Sons, Inc.

Munir, R., 2009, *Matematika Diskrit Edisi Ketiga*, Informatika, Bandung.

Wicaksono, S. A. dan Soleha, 2013, *Kajian Sifat-Sifat Graf Pembagi-nol dari Ring Komutatif dengan Elemen Satuan*, Jurnal Sains dan Seni Pomits, Vol.2 No.1, Jurusan Matematika FMIPA ITS, Surabaya

Anderson, D. D. dan Philip S. L, 1999*, The Zero-Divisor Graph of a commutative Ring, Jurnal of Algebra*, 211, Mathematic Departement, The University of Tenessee, Knoxvile.

Abdussakir. (2017). *Radius, Diameter, Multiplisitas Sikel, dan Dimensi Metrik Graf Komuting dari Grup Dihedral.* Jurnal Matematika "Mantik", *3*(1), 1-4. doi: 10.15642/mantik.2017.3.1.1-4