VOLUME 1 NO 1 JUNI 2018

e- ISSN: 2615-3270

p-ISSN: 2615-3599

Eigen Mathematics Journal

Homepage jurnal: http://eigen.unram.ac.id

Submodul Prima Lemah dan Submodul Hampir Prima Pada $\mathbb{Z}$-modul $M_{2x2}(\mathbb{Z}_9)$.

I Gede Adhitya Wisnu Wardhana[a,*], Ni Wayan Switrayni[b], Qurratul Aini[c]

[a]*Universitas Mataram, Jl.Majapahit 62, Mataram, 83125, Indonesia,. Email:adhitya.wardhana@unram.ac.id*
[b]*Universitas Mataram, Jl.Majapahit 62, Mataram, 83125, Indonesia,. Email:niwayan.switrayni@unram.ac.id*
[c]*Universitas Mataram, Jl.Majapahit 62, Mataram, 83125, Indonesia,. Email:qurratulaini.aini@unram.ac.id*

ABSTRACT

Prime submodule is the abstraction to module theory of prime ideal in ring theory. A proper submodule N of an R-module M is called prime submodule if for all $r \in R$ and $m \in M$ such that $rm \in N$ implies $r \in (N{:}M)$ or $m \in N$. Prime submodule also generalized into weakly prime submodule and almost prime submodule. This study deal with particular cases of both of them in $\mathbb{Z}$-module $M_{2x2}(\mathbb{Z}_9)$, the three submodules are equivalent in case of non-zero submodule.

Keywords : Almost Prime Submodule, Prime Submodule, Weakly Prime Submodule.

1. Pendahuluan

Bilangan prima dan abstraksinya adalah topik yang menarik dibahas pada Teori Kriptografi dan Teori Koding. Abstraksi bilangan prima pertama diperkenalkan oleh Dedekind pada tahun 1871, dikenal dengan nama ideal prima. Dauns mendefinisikan padanana ideal prima pada modul dengan submodul prima pada tahun 1978. Tahun 2009 Hadi memperumumnya menjadi submodul prima lemah. Yang kemudian oleh Khashan diperumum kembali menjadi submodul hampir prima pada tahun 2012. Pada artikel ini akan dibahas kasus khusus dari submodul prima lemah dan submodul hampir prima pada $\mathbb{Z}$-modul $M_{2x2}(\mathbb{Z}_9)$.

Mudah diselidiki jika $\mathbb{Z}$-modul $M_{2x2}(\mathbb{Z}_9)$ adalah suatu modul primer dengan order 3^2 dan memiliki dekomposisi siklik berikut:

$$\begin{pmatrix}\bar{a} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{b}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{c} & \bar{0}\end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{d}\end{pmatrix}$$

dengan $a, b, c, d \in \mathbb{Z}_9$. Masing-masing suku siklik dari dekomposisi ini memiliki order 3^2.

Submodul prima, submodul prima lemah dan submodul hampir prima adalah submodul stacked, yakni berbentuk:

$$3^{e_1}\begin{pmatrix}\bar{a} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix} \oplus 3^{e_2}\begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{b}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix} \oplus 3^{e_3}\begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{c} & \bar{0}\end{pmatrix} \oplus 3^{e_4}\begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{d}\end{pmatrix}$$

dengan $a, b, c, d \in \mathbb{Z}_9$ dan $e_1, e_2, e_3, e_4 \in \{0,1,2\}$. Catat bahwa . $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ tak semuanya nol.

Jika diberikan dua buah submodul N dan K dari R-modul M. Sisa dari N oleh K didefinisikan dengan himpunan $(N : K) = \{r \in R | rK \subseteq N\}$. Kemudian submodul prima didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 1
Misalkan N adalah submodul sejati dari R-modul M. Submodul N dikatakan submodul prima lemah jika

* *Corresponding author.* adhitya.wardhana@unram.ac.id

untuk setiap $r \in R$ dan $m \in M$ dengan $rm \in N$, maka $r \in (N:M)$ atau $m \in N$.

Pada $\mathbb{Z}$-modul $M_{2x2}(\mathbb{Z}_9)$, submodul prima dapat dikarakterisasi sesuai teorema berikut.

Teorema 1
Misalkan diberikan $\mathbb{Z}$-modul $M_{2x2}(\mathbb{Z}_9)$ dan submodul N. Submodul N adalah submodul prima dari $M = M_{2x2}(\mathbb{Z}_9)$ jika dan hanya jika submodul N berbentuk

$$3^{e_1}\begin{pmatrix}\bar{a} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix} \oplus 3^{e_2}\begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{b}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix} \oplus 3^{e_3}\begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{c} & \bar{0}\end{pmatrix} \oplus 3^{e_4}\begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{d}\end{pmatrix}$$

dengan $e_1, e_2, e_3, e_4 \in \{0,1\}$ dan e_1, e_2, e_3, e_4 tak semuanya nol.

Bukti:
Pertama, misalkan berlaku $e_1, e_2, e_3, e_4 \in \{0,1\}$ dan e_1, e_2, e_3, e_4 tak semuanya nol. Maka didapatkan $(N: M) = \langle 3\rangle$. Misalkan $r\begin{pmatrix}\overline{m_1} & \overline{m_2}\\ \overline{m_3} & \overline{m_4}\end{pmatrix} \epsilon N$, tulis $r\begin{pmatrix}\overline{m_1} & \overline{m_2}\\ \overline{m_3} & \overline{m_4}\end{pmatrix} = 3D$ untuk suatu $D \epsilon M_{2x2}(\mathbb{Z}_9)$. Akibatnya $3|rm_i$ untuk semua i, sehingga diperoleh $3|r$ atau $3|m_i$ untuk semua i. Atau bisa disimpulkan $r\epsilon(N: M)$ atau $\begin{pmatrix}\overline{m_1} & \overline{m_2}\\ \overline{m_3} & \overline{m_4}\end{pmatrix} \epsilon N$. Jadi N submodul prima.

Sebaliknya, misalkan N submodul prima, karena N submodul tak nol maka terdapat $j\epsilon\{1,2,3,4\}$ sehingga $3^{e_j} < 9$. Andaikan terdapat k sehingga $e_k > 1$, ini berakibat $(N: M) = \langle 3^2\rangle$. Tanpa mengurangi perumuman, misalkan $k = 1$. Akibatnya bisa dipilih $r = 3 \notin (N: M)$ dan $m = \begin{pmatrix}\bar{3} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix} \notin N$ sehingga $rm\epsilon N$. Hal ini kontradiksi dengan N submodul prima. Jadi haruslah $e_{1`}, e_2, e_{3`}, e_{4`} \in \{0,1\}$. ■

Definisi ini submodul prima kemudian diperlemah Hadi yang kemudian dinamakan submodul prima lemah.

2. Submodul Prima Lemah

Submodul prima lemah didefinisikan oleh Hadi sebagai berikut.

Definisi 2
Misalkan N adalah submodul sejati dari R-modul M. Submodul N dikatakan submodul prima lemah jika untuk setiap $r \in R$ dan $m \in M$ dengan $rm \in N - \{0\}$, maka $r \in (N: M)$ atau $m \in N$.

Dari definisi jelas submodul nol pasti merupakan submodul prima lemah. Berdasarkan definisi juga, submodul prima pasti merupakan submodul prima lemah, tapi tidak sebaliknya. Contohnya pada $\mathbb{Z}$-modul $M_{2x2}(\mathbb{Z}_9)$. Jelas dari definisi, submodul $\left\{\begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix}\right\}$ adalah contoh submodul prima lemah, tapi bukan submodul prima. Hal ini dikarenakan $3.\begin{pmatrix}\bar{3} & \bar{3}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix}$ tidak berakibat $3 \in (N: M) = 9\mathbb{Z}$ atau $\begin{pmatrix}\bar{3} & \bar{3}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix} \in \left\{\begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix}\right\}$.
Karakterisasi submodul prima diberikan oleh teorema berikut

Teorema 2
Misalkan diberikan $\mathbb{Z}$-modul $M_{2x2}(\mathbb{Z}_9)$ dan submodul N. Submodul N adalah submodul prima lemah dari $M = M_{2x2}(\mathbb{Z}_9)$ jika dan hanya jika submodul N berbentuk

$$3^{e_1}\begin{pmatrix}\bar{a} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix} \oplus 3^{e_2}\begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{b}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix} \oplus 3^{e_3}\begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{c} & \bar{0}\end{pmatrix} \oplus 3^{e_4}\begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{d}\end{pmatrix}$$

dengan $e_1, e_2, e_3, e_4 \in \{0,1\}$ dimana e_1, e_2, e_3, e_4 tak semuanya nol atau N submodul nol.

Bukti:
Cukup dibuktikan bahwa jika N submodul prima lemah tak nol, maka N adalah submodul prima.

Misalkan $rm \in N$. Untuk $rm = 0$ diperoleh $r\begin{pmatrix}\overline{m_1} & \overline{m_2}\\ \overline{m_3} & \overline{m_4}\end{pmatrix} = 3D$, untuk suatu $D\epsilon M_{2x2}(\mathbb{Z}_9)$. Akibatnya $3|r$ atau $3|m_i$ untuk semua i. Hal ini berlaku juga $r\begin{pmatrix}\overline{m_1} & \overline{m_2}\\ \overline{m_3} & \overline{m_4}\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix}$ karena N submodul prima lemah. Akibatnya terbukti N submodul prima. Dan ini membuktikan Teorema. ■

Dari teorema di atas diperoleh bahwa semua submodul stacked adalah submodul prima lemah.

Definisi submodul prima lemah diperlemah kembali oleh Khashan, dan dinamakan submodul hampir prima.

3. Submodul Hampir Prima

Submodul hampir prima didefinisikan oleh Khashan sebagai berikut.

Definisi 3
Misalkan N adalah submodul sejati dari R-modul M. Submodul N dikatakan submodul hampir prima jika untuk setiap $r \in R$ dan $m \in M$ dengan $rm \in N - (N:M)N$, maka $r \in (N:M)$ atau $m \in N$.

Berdasarkann definisi, pada $\mathbb{Z}$-modul $M_{2x2}(\mathbb{Z}_9)$ diperoleh bahwa semua submodul hampir prima merupakan submodul prima lemah. Teorema berikut membuktikan bahwa pada $\mathbb{Z}$-modul $M_{2x2}(\mathbb{Z}_9)$, untuk kasus submodul tak nol, submodul hampir prima, submodul prima lemah dan submodul prima semuanya adalah ekivalen.

Teorema 3
Misalkan diberikan $\mathbb{Z}$-modul $M_{2x2}(\mathbb{Z}_9)$ dan submodul N. Submodul N adalah submodul hampir prima jika dan hanya jika submodul N adalah submodul prima.

Bukti

Misalkan N adalah submodul hampir prima yang tak nol. Akan ditunjukkan submodul N berbentuk

$$3^{e_1}\begin{pmatrix}\bar{a} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix} \oplus 3^{e_2}\begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{b}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix} \oplus 3^{e_3}\begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{c} & \bar{0}\end{pmatrix} \oplus 3^{e_4}\begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{d}\end{pmatrix}$$

dengan $e_1, e_2, e_3, e_4 \in \{0,1\}$. Andaikan terdapat $k \in \{1,2,3,4\}$ sehingga $e_k = 2$. Tanpa mengurangi perumuman, misalkan $k = 1$. Akibatnya diperoleh $(N:M)N = \begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix}$. Pilih $r = 3 \notin (N:M)$ dan $m = \begin{pmatrix}\bar{3} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix} \notin N - (N:M)N$ sehingga $rm \in N$. Hal ini kontradiksi dengan N submodul hampir prima. Jadi haruslah $e_1, e_2, e_3, e_4 \in \{0,1\}$. Berdasarkan Teorema 1 diperoleh bahwa N submodul prima. ■

DAFTAR PUSTAKA

Dauns, John, 1994, Modules and Rings. Cambridge University Press, New York.

Hadi, I.M,A., 2009. On Weakly Prime Submodules. Ibn Al-Haitham Journal For Pure and Applied Science, 22 (3).

Khashan, Hani A, 2012. On Almost Prime Submodules. Acta Mathematica Scientia, 32B (2), 645-651.

Roman, Steven, 2007. Advance Linier Algebra, in : Graduated Text In Mathematics vol. 135. Springer, New York.

Wardhana, I. G. A. W., Astuti, P., Muchtadi-Alamsyah, I. 2016. On Almost Prime Submodules of a Finitely Generated Free Module Over a Principal Ideal Domain, AJP Journal of Algebra, Number Theory and Aplication, 38(2), 121-128.