Volume 4 No 2 Desember (2021)

e-ISSN: **2615-3270**

p-ISSN: **2615-3599**

Eigen Mathematics Journal

Homepage jurnal: http://eigen.unram.ac.id

Fuzzy Metric Space and Its Topological Properties

Masriani[a], Qurratul Aini[b], Syamsul Bahri[c]

[a]Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Mataram, Jl. Majapahit No.62, Mataram, 83125, Indonesia. Email: masriani@unram.ac.id

[b]Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Mataram, Jl. Majapahit No.62, Mataram, 83125, Indonesia. Email: qurratulaini.aini@unram.ac.id

[c]Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Mataram, Jl. Majapahit No.62, Mataram, 83125, Indonesia. Email: syamsul.math@unram.ac.id

A B S T R A C T

The theory of fuzzy sets was introduced by Zadeh in 1965. This theory proposed the membership function operating on the interval [0, 1]. The theory of fuzzy sets has been developed continuously. One of the developments on the fuzzy set is the fuzzy metric space which was introduced by George and Veeramani. This paper is a survey on recent results related to fuzzy metric spaces. In particular, we describe the relation between fuzzy metric spaces and metric spaces. Moreover, we describe some results related to topological properties of the fuzzy metric space.

Keywords: Fuzzy sets, fuzzy metric space, metric space, topology

A B S T R A K

Teori himpunan fuzzy pertama kali diperkenalkan oleh Zadeh pada tahun 1965. Teori ini mengusulkan bahwa nilai fungsi keanggotaan memiliki daerah hasil pada interval [0, 1]. Teori himpunan fuzzy berkembang secara terus menerus. Salah satu hasil pengembangan dari teori ini adalah ruang metrik fuzzy yang diperkenalkan oleh George dan Veeramani. Paper ini merupakan survey hasil-hasil terbaru terkait ruang metrik fuzzy. Dalam paper ini dideskripsikan hubungan antara ruang metrik fuzzy dan ruang metrik biasa. Lebih jauh, dideskripsikan juga beberapa hasil terkait sifat-sifat topologi dari ruang metrik fuzzy.

Kata kunci: Himpunan fuzzy, ruang metrik fuzzy, ruang metrik, topologi

Diserahkan: 16-05-2021; Diterima: 06-01-2022; Doi: https://doi.org/10.29303/emj.v4i2.95

* Corresponding author.
Alamat e-mail: *masriani@unram.ac.id*

1. Pendahuluan

Matematika dikenal sebagai cabang ilmu pengetahuan yang memiliki karakter berbeda dengan ilmu pengetahuan lainnya yang lebih menekankan hasil eksperimen atau hasil observasi, matematika lebih menekankan kegiatan berpikir (penalaran) (Russeffendi,1980). Matematika juga memperkenalkan konsep teori logika tegas. Pada logika tegas kita hanya mengenal salah atau benar dengan nilai kebenaran 0 jika salah atau 1 jika benar. Namun, dalam kehidupan sehari-hari sering kali ditemukan kasus yang tidak dapat dinyatakan sebagai benar atau salah. Dalam logika fuzzy kita dapat menyatakan, hampir benar atau semacamnya dengan suatu nilai, antara benar atau salah (Nasution, 2012). Logika fuzzy memungkinkan nilai kebenaran pada interval , tingkat keabuan dan juga hitam dan putih dan dalam bentuk linguistik, konsep tidak pasti seperti "sedikit", "lumayan" dan "sangat" (Zadeh, 1965).

Logika fuzzy pertama kali diperkenalkan oleh Profesor Lotfi A. Zadeh, seorang ilmuan dari Universitas California pada tahun 1965 melalui tulisannya yang berjudul Fuzzy Sets (Nasution, 2012). Ketika teori himpunan fuzzy mulai diperkenalkan, para ilmuwan matematika berpendapat bahwa teori himpunan fuzzy serupa dengan teori probabilitas. Mereka menyatakan bahwa teori probabilitas dapat menyelesaikan masalah yang mengandung ketidakpastian dan yang dapat diselesaikan oleh teori fuzzy. Pada awalnya sebagian besar lembaga riset menganggap bahwa teori fuzzy bukan bidang penelitian yang dianggap serius. Hal itu dikarenakan aplikasi nyata dari logika fuzzy tidak dapat ditunjukkan (Wang, 1997). Seiring dengan perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi, perkembangan teori himpunan fuzzy semakin pesat. Para matematikawan mempelajari dan mengembangkan himpunan fuzzy dalam aplikasinya di berbagai bidang maupun teori-teori terkait. Perkembangan teori ini akhirnya membuat para ahli matematika mulai mempertimbangkan untuk mempelajari teori matematika lain yang dipadukan dengan teori himpunan fuzzy, salah satunya adalah ruang metrik.

Konsep ruang metrik fuzzy pertama kali diperkenalkan oleh Kramosil & Michalek (1975). Setelah Kramosil dan Michalek memperkenalkan konsep ruang metrik fuzzy, pada tahun 1991 Roopkumar dan Vembu telah menunjukkan hubungan ruang metrik dengan ruang metrik fuzzy. Selanjutnya pada tahun 1994 George & Veeramani mendefinisikan F-boundedness dan implikasi F-boundedness terhadap kekompakan pada ruang metrik fuzzy.

Paper ini merupakan survey terkait hubungan antara ruang metrik dan ruang metrik fuzzy. Lebih jauh, dibahas juga sifat himpunan terbuka dan tertutup pada ruang metrik fuzzy.

2. Hubungan Antara Ruang Metrik Fuzzy dan Ruang Metrik

2.1 Terminologi dasar

Pada bagian ini akan dibahas mengenai definisi ruang metrik beserta contohnya.

Definisi 2.1.1 (Korner, 2014).

Misalkan X himpunan tak kosong dan $\mathrm{d}:\mathrm{X}^2 \to \mathbb{R}$ adalah suatu fungsi yang memenuhi kondisi berikut:

a) $\mathrm{d}(\mathrm{a},\mathrm{b}) \geq 0$ untuk setiap $\mathrm{a},\mathrm{b} \in \mathrm{X}$,
b) $\mathrm{d}(\mathrm{a},\mathrm{b}) = 0$ jika dan hanya jika $\mathrm{a} = \mathrm{b}$,
c) $\mathrm{d}(\mathrm{a},\mathrm{b}) = \mathrm{d}(\mathrm{b},\mathrm{a})$ untuk setiap $\mathrm{a},\mathrm{b} \in \mathrm{X}$,
d) $\mathrm{d}(\mathrm{a},\mathrm{b}) \leq \mathrm{d}(\mathrm{a},\mathrm{c}) + \mathrm{d}(\mathrm{c},\mathrm{b})$ untuk setiap $\mathrm{a},\mathrm{b},\mathrm{c} \in \mathrm{X}$.

disebut metrik pada X. Selanjutnya himpunan X yang dilengkapi metrik d, ditulis (X,d) disebut ruang metrik.

Agar definisi ruang metrik lebih mudah dipahami, diberikan tiga contoh ruang metrik berikut:

Contoh 2.1.1

1. $(\mathbb{R}^2, d)$ adalah ruang metrik dengan
   $d(x,y) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$
   untuk setiap $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
2. $(\mathbb{R}, d)$ adalah ruang metrik dengan
   $d(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$, untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$.
3. $(\mathbb{R}, d)$ adalah ruang metrik dengan
   $d(x,y) = \sqrt{(x-y)^2}$, untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$.

Ruang metrik *fuzzy* dapat didefinisikan dengan berbagai cara. Salah satunya adalah definisi ruang metrik *fuzzy* yang diperkenalkan oleh George dan Veeramani (1994) , yang menggunakan definisi norm-t kontinu. Selanjutnya akan dijelaskan pengertian norm-t kontinu. Namun, sebelum membahas ruang metrik *fuzzy* , terlebih dahulu akan dibahas operasi biner dan norm-t kontinu.

Definisi 2.1.2 (David & Richard, 2004)
Misalkan S suatu himpunan yang tidak kosong. Operasi biner merupakan pemetaan dari S × S ke S yang mengaitkan setiap pasangan terurut (a, b) ∈ S × S dengan tepat satu elemen di S.

Definisi 2.1.3 (George & Veeramani, 1994)
Operasi biner $* : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ disebut norm-t, jika memenuhi kondisi:

a. Operasi biner $*$ bersifat komutatif dan asosiatif;
b. Untuk setiap $a \in [0,1]$, $a * 1 = a$;
c. Jika $a \leq c$ dan $b \leq d$ maka $a * b \leq c * d, \forall a, b, c, d \in [0,1]$.

Jika operasi biner $*$ kontinu maka operasi biner $*$ disebut norm-t kontinu.

Definisi 2.1.4 (George & Veeramani, 1994)
Misalkan X adalah himpunan tak kosong, operasi $*$ pada suatu norm-t kontinu dan M adalah himpunan *fuzzy* pada $X \times X \times (0, \infty)$ yang memenuhi kondisi berikut:
$\forall\, x, y \in X$ dan $s, t > 0$

1. $M(x, y, t) > 0$ (1)
2. $M(x, y, t) = 1$ jika dan hanya jika $x = y$
3. $M(x, y, t) = M(y, x, t)$
4. $M(x, y, t) * M(y, z, s) \leq M(x, z, t + s)$
5. $M(x, y, \theta) : (0, \infty) \to (0,1]$ kontinu

$(\mathrm{X}, \mathrm{M}, *)$ disebut ruang metrik *fuzzy* dan nilai $M(x, y, t)$ merepresentasikan derajat kedekatan antara *x* dan *y* terhadap *t.*

Perlu dicatat bahwa semakin besar nilai $M(x, y, t)$ maka semakin dekat jarak antara *x* dan *y*, begitupun sebaliknya semakin kecil nilai $M(x, y, t)$ maka semakin jauh jarak antara *x* dan *y*.

Contoh 2.1.2
Misalkan $X = \mathbb{R}^2$ dan (X, d) ruang metrik. Didefinisikan norm-t kontinu $a * b = ab$ dan M adalah himpunan *fuzzy* pada $X \times X \times (0, \infty)$ dengan fungsi keanggotaan yang didefinisikan sebagai berikut:

$$M(x, y, t) = 1 - \frac{d(x, y)}{t}$$

untuk setiap $x, y \in X$, $t > 0$ dan $d(x, y) < t$, maka $(X, M, *)$ adalah ruang metrik *fuzzy*.

Sebelum membahas hubungan ruang metrik dan ruang metrik *fuzzy*, terlebih dahulu akan diperkenalkan definisi $\lambda -$ metrik.

Definisi 2.1.5 (Roopkumar & Vembu, 1991)
Misalkan $(X, M, *)$ ruang metrik *fuzzy* dan $\lambda \in (0,1)$. Didefinisikan λ −metrik $d_{M;\lambda}(x, y)$ sebagai:

$$d_{M;\lambda}(x, y) = \text{infimum } \{t \in \mathbb{R} : M(x, y, t) > \lambda\}.$$

2.2 Ruang Metrik Menginduksi Ruang Metrik *Fuzzy*

Ruang metrik selalu dapat dikontruksi menjadi ruang metrik *fuzzy* standar seperti disajikan dalam Teorema 2.2.1 berikut.

Teorema 2.2.1 (Gregori, Minana, & Miravet, 2019)
Setiap ruang metrik adalah ruang metrik *fuzzy.*

Oleh karena itu, untuk mendapatkan ruang metrik *fuzzy* dari ruang metrik yang diberikan, definisikan metrik *fuzzy* standar $M(x, y, t) = \frac{t}{t + d(x,y)} \forall x, y \in X$. Dengan memilih $t > 0$, maka akan diperoleh ruang metrik *fuzzy*. Perhatikan contoh berikut.

Contoh 2.2.1
Misalkan $X = (0,1) \subset \mathbb{R}$ dan (X, d) ruang metrik dan metrik d didefinisikan sebagai $d(x, y) = |x - y|$. Tanpa mengurangi keumuman, pilih t = 1. Didefinisikan norm-t kontinu $a * b = ab$ untuk setiap a, $b \in [0,1]$ dan M adalah himpunan *fuzzy* pada $X \times X \times (0, \infty)$ dengan fungsi keanggotaan yang didefinisikan sebagai berikut:

$$M(x, y, t) = \frac{1}{1 + |x - y|}$$

untuk setiap x, $y \in X$. Diperoleh $(X, M, *)$ adalah ruang metrik *fuzzy*.

2.3 Ruang Metrik Fuzzy Menginduksi Ruang Metrik

Pada penelitian sebelumnya oleh Roopkumar dan Vembu (1991) telah ditunjukkan bahwa dari suatu metrik *fuzzy* $M(x, y, t)$ dapat dikonstruksi sebuah metrik dengan definisi:

$d_{M;\lambda}(x, y) =$ infimum $\{t \in \mathbb{R} : M(x, y, t) > \lambda\}$.

Metrik *fuzzy* yang digunakan Roopkumar dan Vembu dalam pembuktian tersebut adalah metrik *fuzzy* yang diperkenalkan oleh Kramosil dan Michalek pada tahun 1975 yang menggunakan $t \in \mathbb{R}$. Pada tulisan ini metrik *fuzzy* yang digunakan penulis adalah metrik *fuzzy* yang diperkenalkan oleh George dan Veeramani 1994, yaitu metrik *fuzzy* $M(x, y, t)$ dengan nilai $t \in \mathbb{R}^+$. Sehingga definisi metrik yang digunakan adalah sebagai berikut:

$d_{M;\lambda}(x, y) =$ infimum $\{t \in \mathbb{R}^+ : M(x, y, t) > \lambda\}$.

Teorema 2.3.1 (Roopkumar & Vembu, 1991)
Setiap ruang metrik *fuzzy* adalah ruang metrik

Oleh karena itu, untuk mengkontruksi ruang metrik dari ruang metrik *fuzzy* yang diberikan, digunakan langkah-langkah berikut:

1. Ambil sebarang $(X, M, *)$ ruang metrik *fuzzy* dan konstanta $\lambda \in (0,1)$.
2. Kumpulkan $M(x, y, t) > \lambda$ dengan $t > 0$.
3. Tentukan infimum $t \in \mathbb{R}^+$.
4. Bentuk ruang metrik dengan metrik berikut: $d_{M;\lambda}(x, y) = \inf\{t \in \mathbb{R}^+ : M(x, y, t) > \lambda\}$.

Contoh 2.3.2
Diberikan $(X, M, *)$ ruang metrik *fuzzy* dengan

$$M(x, y, t) = \frac{t}{t + |x - y|},$$

$\forall x, y \in X$ dan $t > 0$ maka

$$d_{M;\lambda}(x, y) = \text{infimum}\{t \in \mathbb{R}^+ : M(x, y, t) > \lambda\}$$

dengan $\lambda \in (0,1)$ merupakan ruang metrik. Pembuktian bahwa $d_{M;\lambda}$ metrik dapat dilakukan dengan cara yang serupa dengan yang ada di (Roopkumar dan Vembu, 1991).

2.4 Topologi Pada Ruang Metrik *Fuzzy*

Pada bagian ini akan dijelaskan definisi titik limit, titik dalam, bola terbuka, bola tertutup, himpunan terbatas, himpunan terbuka, dan himpunan tertutup.

Definisi 2.4.1 (Gregori, 2009)
Misalkan $(X, M, *)$ adalah ruang metrik *fuzzy*. Didefinisikan bola terbuka $B_M(x, r, t)$ dengan pusat $x \in X$, jari-jari r dengan $0 < r < 1, t > 0$ sebagai: $B_M(x, r, t) = \{y \in X : M(x, y, t) > 1 - r\}$.

Definisi 2.4.2 (Aphane, 2009)
Diberikan $(X, M, *)$ ruang metrik *fuzzy*. Suatu himpunan bagian A dari X disebut terbuka jika untuk setiap $a \in A$, maka terdapat $0 < r < 1$, $t > 0$ sehingga $B_M(a, r, t) \subset A$.

Teorema 2.4.1 (George & Veeramani, 1994)
Diberikan $(X, M, *)$ ruang metrik *fuzzy*. Setiap bola terbuka adalah himpunan terbuka.

Definisi 2.4.3 (George & Veeramani, 1994)
Diberikan $(X, M, *)$ ruang metrik *fuzzy*, $A \subseteq X$ disebut tertutup jika memuat semua titik limitnya.

Teorema berikut memberikan hubungan antara himpunan terbuka dan tertutup di ruang metrik *fuzzy*. Teorema 2.4.2 dan buktinya belum pernah penulis temukan di dalam referensi manapun.

Teorema 2.4.2.
Misalkan $(X, M, *)$ ruang metrik *fuzzy* dan himpunan $A \subseteq X$. Himpunan A disebut himunan terbuka jika dan hanya jika himpunan A^c himpunan tertutup.

Bukti
($\Longrightarrow$) Diketahui A terbuka, akan ditunjukkan A^c tertutup. Misalkan x titik limit A^c, tetapi $x \notin A^c$ artinya $x \in A$. Karena A himpunan terbuka maka x adalah titik dalam artinya $\exists\ 0 < r < 1$ dan $t > 0$ sehingga $B_M(x, r, t) \subseteq A$. Akibatnya

$$B_M(x, r, t) \cap A^c - \{x\} = \emptyset.$$

Kontradiksi dengan pengandaian. Jadi haruslah $x \in A^c$.

($\Longleftarrow$) Diketahui A^c himpunan tertutup, akan ditunjukkan A himpunan terbuka. Ambil sebarang $x \in A$ maka $x \notin A^c$. Karena A^c himpunan tertutup maka x bukan titik limit A^c. Akibatnya terdapat $0 < r < 1$ dan $t > 0$ sehingga

$$B_M(x, r, t) \cap A^c - \{x\} = \emptyset$$

$$\Longrightarrow \quad B_M(x, r, t) \cap A^c = \emptyset.$$

.dengan demikian $B_M(x, r, t) \subseteq A$. dengan kata lain x titik dalam A. ■

Contoh 2.4.1

Misalkan $(X, M, *)$ ruang metrik *fuzzy* dengan $X = \mathbb{R}$.

$$M(x, y, t) = \frac{t}{t + d(x, y)}$$

Perhatikan bola terbuka dengan pusat 0, $0 < r = 0.5 < 1$ dan $t = 3 > 0$ berikut.

$$B_M(x, r, t) = \left\{y \in X \mid M(x, y, t) = \frac{t}{t + d(x, y)} > 1 - r\right\}$$

$$B_M(0{,}0.5{,}3) = \left\{y \in X \mid \frac{3}{3 + |0 - y|} > 1 - 0.5\right\}$$

$$= \left\{y \in X \mid \frac{3}{3 + |y|} > 0.5\right\}$$

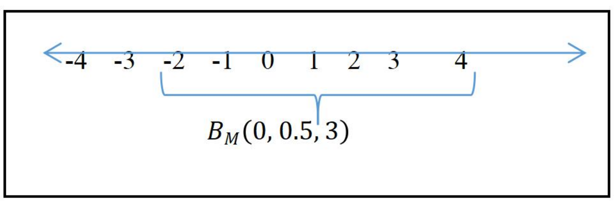
$$= \{y \in X \mid |y| < 3\}$$

$$= \{y \in X \mid -3 < y < 3\}$$

Gambar 2.4.1 berikut merupakan bola terbuka pada ruang metrik *fuzzy* dengan

$$M(x, y, t) = \frac{t}{t + d(x, y)} = \frac{t}{t + |x - y|},$$

berpusat di $x = 0$, jari-jari 0.5, dan $t = 3$.



Gambar 2.4.1

Selanjutnya untuk setiap $x \in A$, x titik dalam A. karena $x \in A$ maka $\exists\, 0 < r = 0.5 < 1$ dan $t = 1$ sehingga $B_M(x, r, t) \subseteq A$. Dengan demikian x titik dalam A. Dapat disimpulkan bahwa A himpunan terbuka. Untuk setiap $0 < r < 1$ dan $t > 0$, akan ditunjukkan untuk setiap x titik limit A^c. $x \in A^c$. Karena x titik limit A^c maka $\forall\, 0 < r < 1$ dan $t = 1 > 0$ berlaku $B_M(x, r, t) \cap [0,1] - \{x\} \neq \emptyset$. Akibatnya $B_M(x, r, t) \nsubseteq (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$. Karena $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ himpunan terbuka maka $x \notin (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ sehingga $x \in [0,1]$. Jadi $[0,1]$ himpunan tertutup.

Contoh 2.4.2

Misalkan $(X, M, *)$ ruang metrik *fuzzy* dengan $X = \mathbb{N}$.

$$M(x, y, t) = \begin{cases} \frac{1}{xy} \; jika\; x \neq y \\ 1 \; jika\; x = y \end{cases}.$$

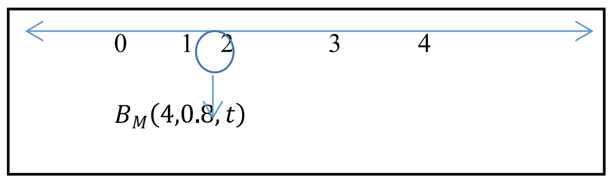
Perhatikan bola terbuka yang berpusat di $x = 4$ dan $0 < r = 0.8 < 1$, $t > 0$ berikut:

$B_M(x, r, t) = \{y \in X \mid M(x, y, t) = \frac{1}{xy} > 1 - r\}$.

Gambar 2.4.2 berikut merupakan bola terbuka pada ruang metrik *fuzzy* dengan

$$M(x, y, t) = \begin{cases} \dfrac{1}{xy} \; jika\; x \neq y \\ 1 \; jika\; x = y \end{cases}$$

berpusat di $x = 4$ jari-jari 0.8.



Gambar 2.4.2

Berikut ditunjukkan bahwa $A = \{x\}$ himpunan terbuka di ruang metrik fuzzy $(X, M, *)$. Ambil sebarang $x \in A$ $\exists\, 0 < r = 0.5 < 1$ dan $t = 1 > 0$ diperoleh $B_M(x, r, t) = \{x\}$. Akibatnya, $B_M(x, r, t) \subseteq \{x\}$. Lebih jauh x adalah titik dalam. Jadi $\{x\}$ himpunan terbuka. $A^c = \mathbb{N} \setminus \{x\}$ himpunan tertutup $\forall\, 0 < r < 1$ dan $t > 0$. Ambil sebarang $y \notin A^c$, $y \in A$. $\exists\, 0 < r = \frac{1}{2} < 1$ dan $t = \frac{1}{2} > 0$ sehingga

$$B_M(y, r, t) = \left\{y \in A \mid M(y, z, t) = 1 > 1 - \frac{1}{2}\right\}$$

$$B_M\left(y, \tfrac{1}{2}, t\right) = \{y \in A \mid y = x\}.$$

Akibatnya,

$B_M(y, r, t) \cap A - \{x\} = \emptyset$.

Dengan demikian x bukan titik limit A. Jadi dapat disimpulkan bahwa A adalah himpunan terbuka.

3. Kesimpulan

Berdasarkan survey yang telah dilakukan dapat disimpulkan bahwa:

1. Setiap ruang metrik adalah ruang metrik *fuzzy*.

2. Setiap ruang metrik *fuzzy* adalah ruang metrik.

Himpunan A terbuka jika dan hanya jika himpunan A^c tertutup.

DAFTAR PUSTAKA

Aphane,M. (2009). On Some Results of Analysis in Metric Spaces and Fuzzy Metric Spaces. Pretoria: University of South Africa,

David, S. D., & Richard, M. F. (2004). Abstract Algebra 3 Edition. New York: Prentice-Hall. Inc.

George, A., & Veeramani, P. (1994). On Some Results In Fuzzy Metric Spaces. Fuzzy Sets and System, 64, 395-399.

Gregori, V., Morillas , S., & Sapena , A. (2009). On Convergence In Fuzzy Metric Spaces. Topology and Its Aplications, 156, 3002-3006.

Korner, T. W. (2014). Metric and Topological Spaces. 1-109.

Kramosil, I., & Michálek, J. (1975). Fuzzy Metrics and Statistical Metric Spaces. Kybernetika, 11(5), 336-334. .

Nasution, H. (2012). Implementasi Logika Fuzzy pada Sistem Kecerdasan Buatan. ELKHA, 4, 4-8.

Roopkumar, R., & Vembu, R. (1991). Some Remarks On Metrics Induced By a Fuzzy Metric. Mathematics Subject Classification, 1.

Ruseffendi, ET. (1980) . Pengajaran Matematika Modern Untuk Orangtua, Murid, Guru dan SPG. Bandung: Tarsito.

Wang, L. X. (1997). A Course In Fuzzy System And Control. United States: Prentice-Hall International. Inc.

Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy Sets. Information and Control, 8, 338-353.