Volume. 1 No 1 April (2024)

e-ISSN: xxxx-xxxx
p-ISSN: xxxx-xxxxx

Semeton Mathematics Journal

Homepage jurnal: http://eigen.unram.ac.id/semeton

Simulasi dan Akurasi Numerik Persamaan Gelombang Satu Dimensi Menggunakan Aproksimasi Metode Beda Hingga

(*Numerical Simulation and Accuracy of One-Dimensional Wave Equation by Using Finite Difference Methods Approximation*)

Nuzla Af'idatur Robbaniyyah[a*], Annisa Sri Muliyanti[b], Dede Ambiya Malasso[c], Dwi Hafizatul Pajri[d]

[a] Matematika, Universitas Mataram, Indonesia, nuzla@unram.ac.id
[b] Matematika, Universitas Mataram, Indonesia, annisamulyanti@gmail.com
[c] Matematika, Universitas Mataram, Indonesia, dedeambiya@gmail.com
[d] Matematika, Universitas Mataram, Indonesia, dwihafizatul1707@gmail.com

ABSTRACT

The wave equation is a form of partial differential equation that represents physical phenomena on classical physics that are often encountered in everyday life. For example a mechanical waves, such as water waves, sound waves, and seismics waves or light waves. In this research, discussed one-dimensional homogeneous wave equation. Analytical solutions and numerical solutions will be peeled in this research. The numerical solution is approached by using the finite center difference method with an explicit scheme. The solution obtained is simulated with MATLAB software. The results show that the analytical solution has the same pattern as the numerical solution. In other hand, a good level of accuracy was also is obtained using different methods by using a Mean Absolute Percentage Error (MAPE) value of 12%.

Keywords: Simulation; Accuracy; Wave Equation; Finite Difference Method.

ABSTRAK

Persamaan gelombang merupakan salah satu bentuk persamaan diferensial parsial yang merepresentasikan fenomena fisis dalam fisika klasik yang sering dijumpai di kehidupan sehari-hari. Contohnya meliputi gelombang mekanikal seperti gelombang air, gelombang suara, dan gelombang seismik atau gelombang cahaya. Pada penelitian ini, dibahas persamaan gelombang homogen satu dimensi. Solusi analitik dan solusi numerik akan dikupas pada penelitian ini. Solusi numerik didekati menggunakan metode beda hingga beda pusat dengan skema eksplisit. Solusi yang didapatkan disimulasikan dengan software MATLAB. Hasilnya memperlihatkan bahwa solusi analitik mempunyai pola yang sama dengan solusi numerik. Selain itu, didapatkan pula tingkat akurasi yang baik pada metode beda hingga dengan menggunakan perolehan nilai *Mean Absolute Percentage Error* (MAPE) sebesar 12%.

Keywords: Simulasi; Akurasi; Persamaan Gelombang; Metode Beda Hingga.

Diterima: 25-03-2024;
Disetujui: 30-04-2024;

Doi: https://doi.org/10.29303/semeton.v1i1.204

* Corresponding author
e-mail: nuzla@unram.ac.id

1. Pendahuluan

Matematika merupakan salah satu ilmu dasar yang banyak diterapkan dalam cabang ilmu lainnya seperti ilmu ekonomi, sains, teknik, hingga dalam ilmu yang berkaitan dengan teknologi. Dalam lingkup sains, matematika banyak dijumpai dalam cabang ilmu sains fisika. Kolaborasi antara matematika dan fisika dapat digunakan untuk menyelesaikan berbagai persoalan baik itu yang rumit maupun persoalan sederhana yang sering dijumpai dalam kehidupan sehari-hari. Hampir seluruh kegiatan manusia yang berhubungan dengan gaya, perpindahan, dan energi dapat dihitung dengan prinsip fisika yang penyelesaiannya didukung oleh prinsip matematika.

Salah satu bentuk penyelesaian menggunakan merupakan konsep dasar pengaplikasian suatu kejadian sehari-hari yang menggunakan konsep turunan fungsi. Persamaan diferensial menghasilkan fungsi yang tak diketahui turunannya terhadap satu atau lebih variabel bebas (Sitompul dan Siahaan, 2022). Berdasarkan jumlah variabel bebas yang dimiliki, persamaan diferensial dibagi menjadi dua, yaitu persamaan diferensial biasa yang memuat satu variabel bebas dan persamaan diferensial parsial yang memuat lebih dari satu variabel bebas.

Persamaan diferensial parsial banyak digunakan dalam permasalahan bidang fisika. Salah satu contoh dari permasalahan tersebut adalah persamaan gelombang (Robbaniyyah, 2022). Salah satu contoh persamaan gelombang adalah persamaan Korteweg-De Vries (KdV). KdV merupakan persamaan diferensial parsial nonlinear yang digunakan sebagai model matematika untuk gelombang pada permukaan air dangkal (Haizar, Rizki, Robbaniyyah, 2024). Persamaan diferensial parsial lebih banyak digunakan karena dalam kehidupan sehari-hari karena variabel-variabel yang dijumpai biasanya cukup kompleks atau terdiri dari lebih dari satu variabel (Syafwan, Ramdhan, Yusda, 2018). Salah satu aplikasi persamaan diferensial parsial dalam kehidupan sehari-hari dapat dijumpai dalam penyelesaian persamaan gelombang. Persamaan gelombang merupakan salah satu persoalan fisika yang membutuhkan matematika dalam penyelesaiannya. Persamaan gelombang satu dimensi adalah salah satu bentuk persamaan diferensial parsial (PDP). PDP adalah salah satu bagian dari persamaan diferensial. PDP adalah persamaan turunan fungsi yang memuat satu atau lebih variabel bebas. Persamaan gelombang termasuk kedalam PDP dengan orde 2. Persamaan gelombang ini dapat dijumpai pada gelombang bunyi alat musik, gelombang elektromagnetik, hingga gelombang Schrödinger pada fisika kuantum (Noor, Putri, Syafwan, 2019).

Dalam penyelesaian persamaan diferensial parsial terdapat dua cara penyelesaian, yaitu secara analitik atau eksak dan secara numerik atau pendekatan. Secara numeric atau pendekatan menjadi salah satu alternatif penyelesaian pada saat persamaan diferensial parsial tersebut tidak dapat diselesaikan secara analitik. Berdasarkan hasil komputasi numerik mengatakan bahwa komputasi numerik dapat ampuh menyelesaikan persamaan-persamaan matematika dan sekaligus mengkaji keadaan-keadaan sistem suatu kejadian-kejadian fisis dalam kehidupan sehari-hari (Prasetya, Kinansih, 2014). Salah satu metode untuk menyelesaikan persamaan gelombang satu dimensi adalah metode beda hingga. Salah satu contoh simulasi numerik persamaan gelombang air dangkal 1D dengan topografi tidak datar menggunakan metode beda hingga yang dilakukan oleh (Setiyowati, Riestiana, 2021) menghasilkan simulasi numerik yang dapat mengetahui hubungan anatara nilai awal amplitudo gelombang dan fungsi topografi terhadap tinggi gelombang tsunami yang dihasilkan. Skema metode beda hingga dibangun berbasis dari ekspansi deret Taylor. Metode numerik yang digunakan untuk mencari penyelesaian persamaan gelombang air dangkal 1D adalah metode beda hingga skema Lax-Friedrichs.

Selain dapat menyelesaikan persamaan gelombang satu dimensi, metode beda hingga juga dapat menyelesaikan persamaan gelombang dua dimensi seperti pada (Chasanah, Jamhuri, alisah, 2021) tentang solusi numerik persamaan gelombang dua dimensi dengan metode beda hingga skema eksplisit. Pada penerapannya, solusi numerik yang dihasilkan biasanya memiliki selisih dengan solusi analitik yang diperoleh (Andani, Harahap, Badruzzaman, 2020). Oleh karena itu, diperlukan suatu analisis akurasi metode menggunakan pendekatan numerik yang digunakan dengan uji stabilitas. Dengan demikian, pada penelitian ini diteliti lebih lanjut mengenai akurasi solusi numerik metode beda hingga pada persamaan gelombang berdimensi satu. *Software* yang digunakan untuk melakukan simulasi adalah bahasa pemrograman MATLAB. Penelitian ini merupakan jenis penelitian kuantitatif. Proses pengerjaannya menggunakan studi literatur. Metode pengerjaannya akan dimulai dengan mengambil sebuah contoh kasus persamaan gelombang satu dimensi, kemudian menentukan solusi eksak. Selanjutnya, solusi numerik akan diperoleh melalui metode beda hingga, dilanjutkan dengan menguji *error* dan kestabilan solusi numerik tersebut, serta membandingkanya dengan solusi eksak.

2. Hasil dan Pembahasan

2.1 Persamaan gelombang satu dimensi

Persamaan gelombang adalah persamaan yang memadukan besaran-besaran yang dimiliki gelombang. Dari persamaan gelombang dapat diperoleh semua besaran gelombang yang dibahas sebelumnya. Gelombang satu dimensi adalah gelombang yang merambat hanya dalam satu arah terlepas dari apakah getaran terjadi dalam arah rambat yang sama atau tidak. Diberikan persamaan gelombang satu dimensi sebagai berikut :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$$

dengan kondisi awal dan kondisi batas :

$u(x,0) = u_0(x)$ dengan $a \leq x \leq b$

$u_t(x,0) = u_1(x)$ merupakan turunan fungsinya, lalu kondisi batasnya

$u(a,t) = \varphi_1(t)$

$u(b,t) = \varphi_2(t)$ dengan $t \geq 0$.

Proses menyederhanakan kasus di atas dilakukan permisalan $c = 1$, $f(x,t) = 0$, $a = 0$, $b = 1$, $\varphi_1(t) = \varphi_2(t) = 0$, dan $u_0 = u_1 = \cos(\pi, x)$ dengan menerapkan kondisi ini PDP dari kasus yang disederhanakan adalah :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

Dengan kondisi awal dan kondisi batas :

$u(x,0) = u_t(x,0) = \sin(\pi, x)$ dengan $a \leq x \leq b$

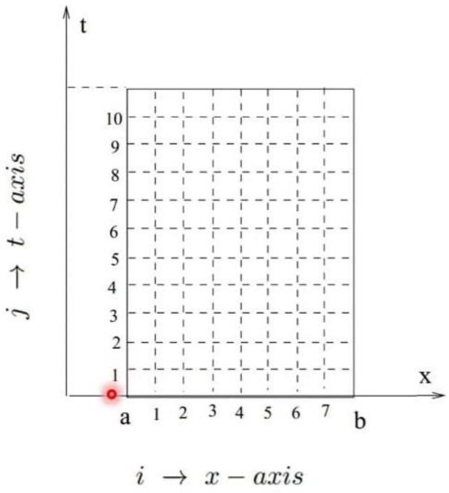
$u(0,t) = 0$

$u(1,t) = 0$ dengan $t \geq 0$

(Zahroh, 2011).

2.2 Simulasi numerik menggunakan metode beda hingga

Proses penyelesaian kasus persamaan diferensial ini digunakan metode beda hingga dengan mendiskritisasi domain pada persamaan diferensial parsial. Pada penelitian ini digunakan pendekatan metode beda hingga pusat untuk memperoleh simulasi numeriknya.



Gambar 1. Koordinat diskritisasi domain

Persamaan (1) mendefinisikan persamaan tersebut menjadi

$$\frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{\Delta t^2} = \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{\Delta x^2} \quad (2)$$

Kalikan kedua sisi persamaan (2) dengan Δt^2, sehingga

$$u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1} = \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}\left(u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}\right)$$

Dimisalkan $\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} = s$ maka diperoleh persamaan sebagai berikut

$$u_{i,j+1} = s\left(u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}\right) + 2u_{i,j} - u_{i,j-1}$$

Pada kondisi awal diketahui nilai turunan pertama dari t adalah $u_t(x, 0) = u_1(x)$, dengan menggunakan metode beda hingga didapatkan

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta t} = u_1$$

atau dapat dituliskan menjadi

$$u_{i,j+1} = u_1 \Delta t + u_{i,j}$$

Kemudian, jika dimisalkan $j = 0$, maka diperoleh $u_{i,1} = u_1 \Delta t + u_{i,0}$. Dari hasil yang diperoleh, diketahui nilai $u_{i,0}$ tidak benar karena seperti yang diketahui pada fungsi sebagai fungsi nilai awal. Seperti yang sudah didefinisikan di atas bahwa nilai $u_0 = u_1 = \cos{(\pi, x)}$, sehingga didapatkan

$$u_{i,1} = u_1 \Delta t + u_{i,0} = \cos(\pi, x)\,(1 + \Delta t)$$

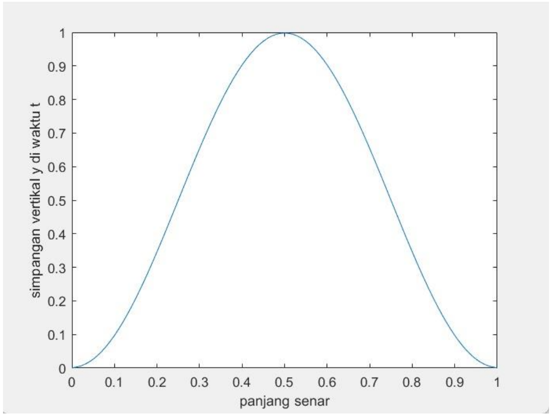
Dikarenakan nilai $u_{i,0}$ diketahui sebagai fungsi nilai awal maka

$$u_{i,0} = \cos{(\pi, x)}$$

Setelah menghitung kedua fungsi di atas didapatkan solusi eksak dari persamaan gelombang dimensi satu adalah sebagai berikut

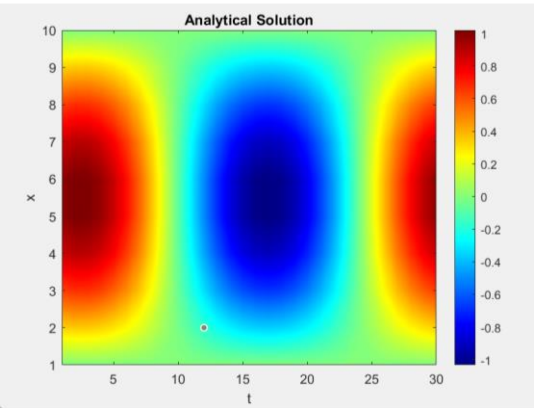
$$u(x,t) = \cos(\pi, x)\left[\sin(\pi t) + \frac{\cos(\pi t)}{\pi}\right] \tag{3}$$

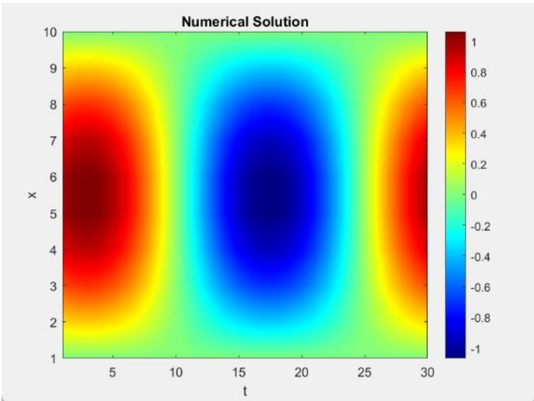
Solusi eksak dari persamaan gelombang dimensi-satu belum diketahui apakah solusi tersebut dapat memenuhi persamaan diferensial parsial dengan kondisi awal dan kondisi batas yang disebutkan diatas. Dengan demikian, diperlukan penghitungan menggunakan bantuan MATLAB. Dengan menggunakan pengaplikasian pendekatan metode beda hingga pusat, diperoleh simulasi numerik berupa gelombang dengan satu puncak pada dengan simpangan yang bernilai 1 sebagai berikut.



Gambar 2. grafik hasil simulasi numerik persamaan gelombang satu dimensi

Berdasarkan gambar 2 telah diperoleh simulasi numerik dari persamaan (1) dengan syarat awal dan ketentuan yang telah diberikan pada penurunan skema metode beda hingga. Diperoleh bentuk visual perbandingan solusi analitik dan solusi numerik pada gambar 3 di bawah ini





Gambar 3. (a) solusi analitik (b) solusi numerik

Terlihat dari kedua gambar pada gambar 3, secara umum memiliki kemiripan yang cukup. Perbedaannya terdapat hanya pada tingkat kemulusan grafik. Hal ini dikarenakan pada proses numerik bidang untuk solusi didekati dengan grid-grid. Selain itu, juga disebabkan adanya diskritisasi domain sehingga dapat diperoleh hasil grafik yang lebih halus. Sedangkan, jika diamati pada solusi eksak pada gambar 3(a) hasil simulasi bersifat kontinyu.

2.3 *Akurasi simulasi numerik*

Keakuratan solusi numerik dapat diuji juga dengan *Mean Absolute Percentage Error* (MAPE) merupakan ukuran akurasi suatu model pendekatan, di mana selisih antara nilai pendekatan dengan nilai sebenarnya dihitung dalam bentuk nilai mutlak dan dijadikan dalam persentase terhadap nilai sebenarnya (Nabillah dan Ranggadara, 2020).. MAPE digunakan apabila ukuran variabel pada peramalan yang dilakukan merupakan faktor yang berpengaruh dalam melakukan evaluasi akurasi peramalan (Nabillah dan Ranggadara, 2020). Nilai MAPE mengindikasikan seberapa besar kesalahan dalam meramal yang dibandingkan nilai nyata dalam deret (Junianto, 2017). Nilai MAPE dapat diperoleh berdasarkan persamaan berikut.

$$MAPE = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\left\|\frac{Y_t - \widehat{Y_t}}{Y_t}\right\| \times 100\%$$

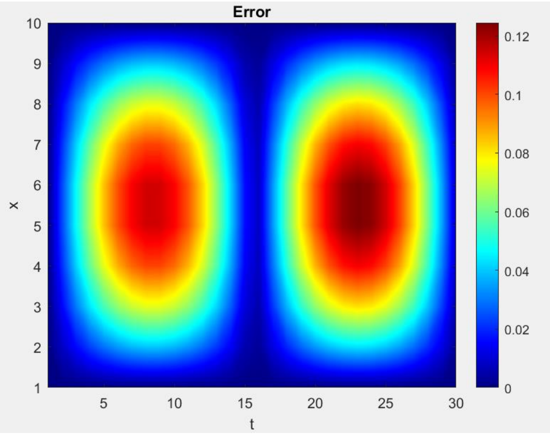
dengan:
Y_t : Solusi eksak
$\widehat{Y_t}$: Solusi numerik.

Nilai MAPE yang semakin rendah menunjukkan bahwa kemampuan model peramalan yang digunakan semakin baik. Secara lebih spesifik, nilai MAPE dan kategori kemampuannya dibagi lagi dalam bentuk persentase berikut. Menurut (Junianto, 2017) di bawah ini merupakan kemampuan peramalan model berdasarkan nilai MAPE yang diperoleh. ilai MAPE kurang dari 10% menunjukkan kemampuan model peramalan sangat baik.

Tabel 1. Tabel kemampuan peramalan model

Nilai MAPE (%)	Kategori
<10	Sangat baik
10-20	baik
20-50	layak
>50	buruk

Selanjutnya, diperoleh *error* dengan menggunakan bantuan *software* diperoleh hasil simulasi *error* di bawah ini.



Gambar 4. Error pada persamaan gelombang satu dimensi

Gambar 4 menunjukkan seluruh hasil perhitungan numerik pada saat t dan x yang bersesuaian dengan solusi eksak dilakukan penghitungan rata-rata galat absolut. Dari hasil perhitungan komputasi diperoleh nilai MAPE sebesar 0.12. Artinya, nilai MAPE yang didapatkan adalah 12%. Hal ini menunjukkan bahwa tingkat akurasi dari metode beda hingga pusat yang telah diimplementasikan pada persamaan gelombang satu dimensi masuk dalam kategori baik. Dapat dijelaskan pula bahwa proses perhitungan disetiap grid menghasilkan galat atau kesalahan rata-rata absolut sebesar 0.12 dan dengan demikian metode beda hingga pusat dapat dikatakan akurat.

Suatu metode numerik dikatakan stabil jika galat yang dihasilkan pada suatu langkah proses tidak cenderung membesar pada proses langkah-langkah berikutnya. Dapat dilihat dari gambar 4 bahwa pergerakan galat dalam setiap proses adalah stabil atau tidak cenderung membesar pada langkah–langkah berikutnya.

3. Kesimpulan

Pada penelitian ini didapatkan hasil simulasi numerik persamaan gelombang satu dimensi dengan menggunakan aproksimasi metode beda hingga pusat. Solusi yang didapatkan berupa grafik gelombang dengan satu puncak. Selain itu, dengan menggunakan *Mean Absolute Percentage Error* (MAPE) diperoleh tingkat keakuratan metode beda hingga pusat yang baik, dengan nilai rata-rata galat absolut sebesar 12%. Selain itu, berdasarkan *error* yang didapat metode beda hingga pusat juga memiliki tingkat kestabilan yang baik.

Ucapan Terima Kasih

Terima kasih kami sampaikan kepada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam dan Program Studi Matematika, Universitas Mataram khususnya pada Kelompok Penelitian Bidang Ilmu Pemodelan dan Simulasi karena telah memberikan ruang dan kesempatan untuk mempublikasikan penelitian ini.

DAFTAR PUSTAKA

[1] SITOMPUL, Hery Andi; SIAHAAN, Enzo W. B.. AKURASI SOLUSI NUMERIK PADA PERSAMAAN GELOMBANG BERDIMENSI-SATU. JURNAL PENELITIAN FISIKAWAN, [S.l.], v. 5, n. 1, p. 54-63, feb. 2022. ISSN 2655-738X. Available at: <https://jurnal.darmaagung.ac.id/index.php/jurnalpenelitianfisikawan/article/view/1340>.

[2] Robbaniyyah, N. A. I. (2022). Pengembangan Metode Iterasi Petviashvili dalam Penentuan Solusi Gelombang Stasioner pada Persamaan Bertipe Schrödinger Nonlinear dengan Fungsi Potensial V (x). *EIGEN MATHEMATICS JOURNAL*, 47-53.

[3] Haizar, M. R., Rizki, M., Robbaniyyah, N. A. I., Syechah, B. N., Salwa, S., & Awalushaumi, L. (2024). Numerical Solution of the Korteweg-De Vries Equation Using Finite Difference Method. *EIGEN MATHEMATICS JOURNAL*, *7*(1), 97-103.

[4] Noor, A. A., PUTRI, A. R., & SYAFWAN, M. (2019). Solusi analitik dan numerik suatu persamaan gelombang satu dimensi. *Jurnal Matematika UNAND*, *8*(4), 1-8.

[5] Prasetya, D. S. B., & Kinasih, I. P. (2014). KAJIAN GELOMBANG SATU DIMENSI BERDASARKAN HASIL KOMPUTASI NUMERIK. *Lensa: Jurnal Kependidikan Fisika*, *2*(2), 217-219.

[6] Chasanah, A. N., Jamhuri, M., & Alisah, E. (2021). Solusi Numerik Persamaan Gelombang Dua Dimensi Dengan Metode Beda Hingga Skema Eksplisit CTCS. *Jurnal Riset Mahasiswa Matematika*, *1*(1), 14-22.

[7] Andani, T., Harahap, E., & Badruzzaman, F. H. (2020). Operasi Matriks Sebagai Media Pembelajaran Menggunakan MATLAB. *Matematika: Jurnal Teori Dan Terapan Matematika*, *19*(2), 33-46.

[8] Zahroh, F. (2011). *Solusi persamaan differensial parsial dengan metode optimal time stepping* (Doctoral dissertation, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim).

[9] Nabillah, I., & Ranggadara, I. (2020). Mean Absolute Percentage Error untuk Evaluasi Hasil Prediksi Komoditas Laut. *Journal of Information System*, *5*(2), 250-255.

[10] Junianto, M. B. S. (2017). Fuzzy inference system mamdani dan the mean absolute percentage error (mape) untuk prediksi permintaan dompet pulsa pada xl axiata depok. *J. Inform. Univ. Pamulang*, *2*(2), 97.