Volume. 1 No 2 Oktober (2024)

e-ISSN: 3062-7737
p-ISSN: 3063-2137

Semeton Mathematics Journal

Homepage jurnal: http://eigen.unram.ac.id/semeton

Studi Keprimaan dalam Modul: Submodul Prima, Prima Lemah, Hampir Prima, dan n- Hampir Prima.

(Study of Primality in Modules: Prime, Weakly Prime, Almost Prime, and n-Almost Prime Submodules)

Jinan Ambar[a*], M. Afdhaluzzikri[b]

a. Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Mataram, Mataram, Indonesia. Email: ambarjinan@gmail.com

b. Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Mataram, Mataram, Indonesia. Email: zikafdol@gmail.com

ABSTRACT

Module theory, as a branch of abstract algebra, is a field of study that extends the concept of vector spaces into a more general framework, finding broad applications across various mathematical fields. The concept of prime numbers, initially abstracted by Dedekind in the form of prime ideals, underwent further development by mathematicians. Anderson generalized it into weak prime ideals, while Sharma developed the concept of nearly prime ideals. After Noether introduced the concept of modules, Dauns brought this primality notion into module theory under the name of prime submodules. Subsequently, Khashan generalized it into weak and nearly prime submodules. The latest development came from Azizi, who introduced the concept of nearly prime submodules into n-nearly prime submodules. In this context, this article discusses several key characteristics of prime submodules and their generalizations, providing a deep understanding of their fundamental structures and properties. Through this understanding, we can explore various applications of module theory in various mathematical contexts and delve into the complexities inherent in the study of primality and submodule structures within modules. The purpose of this research is to explain some structures and properties of prime submodules. This research uses the literature review method, which is by collecting information from various reading sources related to prime submodules and their generality. The result of this research is an explanation of some structures and properties of prime submodules and their examples.

Keywords: Prime submodule; weak prime submodule; almost prime submodule; n-prime submodule; and primary submodule

ABSTRAK

Teori modul, sebagai cabang dari aljabar abstrak, merupakan bidang studi yang memperluas konsep ruang vektor ke dalam kerangka yang lebih umum, menemukan aplikasi yang luas di berbagai bidang matematika. Konsep bilangan prima, yang awalnya diabstraksi oleh Dedekind dalam bentuk ideal prima, mengalami pengembangan lebih lanjut oleh para matematikawan. Anderson memperumumkannya menjadi ideal prima lemah, sedangkan Sharma mengembangkan konsep ideal hampir prima. Setelah Noether memperkenalkan konsep modul, Dauns membawa gagasan keprimaan ini ke dalam teori modul dengan nama submodul prima. Selanjutnya, Khashan memperumumkannya menjadi submodul hampir prima dan submodul prima lemah. Pengembangan terakhir datang dari Azizi, yang memperkenalkan konsep submodul hampir prima menjadi submodul n-hampir prima. Dalam konteks ini, artikel ini

* Corresponding author
e-mail: ambarjinan@gmail.com

membahas beberapa karakteristik kunci dari submodul prima beserta perumumannya, memberikan pemahaman mendalam tentang struktur dan sifat-sifat yang mendasarinya. Melalui pemahaman ini, kita dapat mengeksplorasi berbagai aplikasi teori modul dalam berbagai konteks matematika dan menyelami kompleksitas yang terkandung dalam studi keprimaan dan struktur submodul dalam modul. Tujuan penelitiaan ini adalah menjelaskan beberapa struktur dan sifat-sifat dari submodul prima. Penelitian ini menggunakan metode kajian pustaka, yaitu dengan cara mengumpulkan informasi dari berbagai sumber bacaan yang berkaitan dengan submodul prima beserta perumumannya. Hasil penelitian ini berupa penjelasan mengenai beberapa struktur dan sifat-sifat dari submodul prima beserta contohnya.

Keywords: Submodul prima; submodul prima lemah; submodul hampir prima; submodul n-prima; dan submodul primer

Diterima: 29-05-2024; Doi: https://doi.org/10.29303/semeton.v1i2.216
Disetujui: 13-08-2024;

1. Pendahuluan

Teori modul, sebagai cabang dari aljabar abstrak, memperluas konsep ruang vektor menjadi konsep yang lebih umum dan aplikasinya dapat ditemukan di berbagai bidang matematika dan lainnya. Dalam teori representasi, modul-modul atas aljabar grup membantu mempelajari representasi grup, memberikan wawasan tentang struktur grup melalui aljabar linear. Dalam geometri aljabar, modul-modul atas gelanggang fungsi penting untuk memahami sheaf dan variasi aljabar. Aljabar komutatif bergantung pada modul untuk mengeksplorasi lokalisasi, dekomposisi primer, dan urutan reguler. Modul-modul merupakan inti dari aljabar homologi, memfasilitasi studi kompleks rantai, urutan eksak, dan funktor turunan. Analisis fungsional menggunakan modul-modul atas gelanggang fungsi kontinu atau terukur untuk memeriksa ruang fungsi dan aljabar operator. Teori invarian menggunakan teori modul untuk menganalisis aksi grup pada gelanggang, membantu memahami invarian polinomial dan simetri [1].

Konsep bilangan prima pertama kali diabstraksi oleh Dedekind pada tahun 1871 dalam bentuk ideal prima, yang kemudian diperumumkan menjadi ideal prima lemah oleh Anderson tahun 2003, dan ideal hampir prima oleh Sharma pada tahun 2005. Setelah Noether memperkenalkan konsep modul, Dauns kemudian membawa konsep keprimaan ini ke dalam teori modul dan dinamakan submodul prima. Konsep ini kemudian diperumumkan menjadi submodul prima lemah oleh Hadi tahun 2009 dan hampir prima oleh Khashan pada tahun 2012. Terakhir, Azizi memperumumkan konsep submodul hampir prima menjadi submodul n-hampir prima [2].

Pada ruang vektor, diketahui skalarnya merupakan lapangan. Artinya, suatu ruang vektor V terbentuk jika V merupakan grup aditif abelian dengan skalar yang berasal dari suatu lapangan F dan memenuhi beberapa aksioma. Sedangkan pada modul, skalarnya berasal dari suatu ring R. Berikut diberikan definisi modul.

Definisi 1.1 [3] Misal diberikan R ring komutatif dengan unsur kesatuan. Suatu modul atas R merupakan himpunan M yang dilenghapi dengan dua operasi, yaitu penjumlahan yang dimana setiap elemen $(u, v) \in M \times M$ terhadap elemen $u + v \in M$, dan perkalian skalar yang menghubungkan elemen $(r, v) \in R \times M$ terhadap elemen $rv \in M$, serta memenuhi aksioma-aksioma berikut.

1) M grup aditif abelian.
2) $\forall r, s \in R$ dan $m, n \in M$ berlaku

$$\begin{gathered}(r+s)m = rm + sm \\ r(m+n) = rm + rn \\ (rs)m = r(sm) \\ 1m = m\end{gathered}$$

Oleh karena itu, M disebut modul kiri atas R. Sebaliknya, modul kanan atas R didefinisikan sama serta memenuhi aksioma-aksioma berikut.

1) M grup aditif abelian.
2) $\forall r, s \in R$ dan $m, n \in M$ berlaku

$$\begin{gathered} m(r+s) = mr + ms \\ (m+n)r = mr + nr \\ m(rs) = (mr)s \\ m1 = m \end{gathered}$$

Contoh 1.1 $\mathbb{Z}$-modul $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$-modul $\mathbb{Z}_n$, dan $\mathbb{Z}$-modul $\mathbb{Z}_n[i]$ merupakan modul atas ring bilangan bulat.

Jika ruang vektor yang memiliki subruang dan membentuk ruang vektor lagi atas lapangan yang sama, maka modul juga memiliki subhimpunan yang membentuk modul juga atas ring yang sama yang disebut dengan submodul. Berikut merupakan definisi dari submodul.

Definisi 1.2 [3] Misalkan N merupakan subhimpunan dari R-modul M. Subhimpunan N disebut submodul dari M apabila N membentuk R-modul dengan operasi yang sama terhadap operasi pada M dan dinotasikan dengan $N \leq M$.

Teorema 1.1 [4] Misalkan N merupakan subhimpunan dari R-modul M. N merupakan submodul dari M jika dan hanya jika dua syarat berikut terpenuhi.

1. $n_1 - n_2 \in N, \forall n_1, n_2 \in N$
2. $rn \in N, \forall n \in N; \forall r \in R$

Bukti

($\Rightarrow$) Diketahui bahwa $N \leq M$. Akibatnya, N juga merupakan subgrup dari M. Sehingga $\forall n_1, n_2 \in N$ berlaku $n_1 - n_2 \in N$. Karena $N \leq M$ maka operasi perkalian skalar pada M juga berlaku pada N. Oleh karena itu, $\forall r \in R$ dan $n \in N$ berlaku $rn \in N$.

($\Leftarrow$) Diketahui $\forall n_1, n_2 \in N$ berlaku $n_1 - n_2 \in N$, maka $N \subseteq M$. Selanjutnya, karena M bersifat abelian maka N juga bersifat abelian, sehingga N merupakan subgrup abelian. Diketahui juga $\forall r \in R$ dan $n \in N$ berlaku $rn \in N$, maka operasi skalar di M juga berlaku di N. Akibatnya, $\forall n_1, n_2 \in N$ dan $r, s \in R$ berlaku:

$$\begin{gathered} (r+s)n = rn + sn \\ r(n_1 + n_2) = rn_1 + rn_2 \\ (rs)n = r(sn) \\ 1n = n \end{gathered}$$

■

Contoh 1.2

1. $N = 2\mathbb{Z}$ merupakan submodul dari $\mathbb{Z}$-modul $\mathbb{Z}$.
2. $N = \{0, 1, 3\}$ dari $\mathbb{Z}$-modul $\mathbb{Z}$ bukan submodul karena $3 - 1 = 2 \notin N$.

2. Hasil dan Pembahasan

Berikut akan dijabarkan definisi beserta contoh dari submodul prima, submodul prima lemah, submodul hampir prima, submodul n-hampir prima, serta submodul primer. Misal diberikan submodul N dan S dari R-modul M. Sisa dari N oleh S dinotasikan dengan $(N: S)$ dan didefinisikan sebagai $(N: S) = \{r \in R | rS \subseteq N\}$.

2.1 Submodul Prima (*Prime Submodule*)

Definisi 2.1 [5] Diberikan R-modul M dan $N \leq M$. Submodul N disebut submodul prima dari M jika $\forall r \in R$ dan $m \in M$ dengan $rm \in N$ maka berakibat $m \in N$ atau $r \in (N: M)$.

Teorema 2.1 [6] Diberikan N submodul sejati di R-modul M dan $(N: M) = Ann_R(M/N)$ merupakan ideal di ring R, maka beberapa pernyataan berikut ekuivalen:

i. N merupakan submodul prima.
ii. Setiap submodul tak nol di R-modul M/N memiliki annihilator yang sama yaitu $(N: M)$.
iii. Untuk setiap submodul S di M dan subring A di R, apabila $AS \subseteq N$ berlaku $S \subseteq N$ atau $A \subseteq (N: M)$.

Bukti.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Misal M suatu R-modul dan N submodul prima di M serta $(M: N) = Ann_R(M/N)$ merupakan ideal di ring R. Akan ditunjukkan bahwa untuk setiap submodul tak nol di M/N R-modul memiliki annihilator yang sama yaitu $(N: M)$. Ambil sebarang submodul tak nol K/N di M/N R-modul dan sebarang $\alpha \in Ann_R(M/N)$ dengan kata lain $a\bar{b} = \bar{0}, \forall \bar{b} \in (M/N)$. Karena K/N merupakan submodul dari M/N maka $K/N \subseteq M/N$. Artinya untuk sebarang $\bar{a} \in K/N$ berakibat $a\bar{b} = \bar{0}$. Jadi $\alpha \in Ann_R(K/N)$. Selanjutnya, karena N submodul prima maka untuk sebarang $m \in M\backslash N$ dan $r_1 \in R$ jika $r_1 m \in N$ maka $r_1 \in (N: M)$. Oleh karena itu, untuk sebarang $r \in Ann_R(K/N)$ maka berlaku $r \in (N: M)$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Misal M suatu R-modul dan setiap submodul tak nol di M/N R-modul memiliki annihilator yang sama yaitu $(N: M)$. Akan ditunjukkan bahwa N merupakan submodul prima. Ambil sebarang $m \in M\backslash N$ di mana $rm \in N$ untuk suatu $r \in R$. Dapat ditunjukkan bahwa himpunan $\langle m + N \rangle = \{r_1 m + N | r_1 \in R\}$ merupakan submodul tak nol di M/N R-modul. Selanjutnya, dari yang diketahui diperoleh bahwa $Ann_R(\langle m + N \rangle) = (N: M)$. Artinya untuk sebarang $r_1 \in Ann_R(\langle m + N \rangle)$ maka diperoleh $r_1 \in (N: M)$. Oleh karena $rm \in N$ maka diperoleh bahwa $r \in Ann_R(\langle m + N \rangle)$ yang artinya $r \in (N: M)$. Sehingga N merupakan submodul prima di M R-modul.

(i) $\Rightarrow$ (iii): Misal M suatu R-modul dan N merupakan submodul prima di M. Akan ditunjukkan bahwa jika untuk setiap submodul K di modul M dan subring A di ring R dengan $AK \subseteq N$ maka $K \subseteq N$ atau $A \subseteq (N: M)$. Ambil sebarang submodul K di M dan subring A di ring R di mana $AK \subseteq N$. Selanjutnya, ambil sebarang $k \in K$ dan $a \in A$. Oleh karena K submodul di M dan $a \in R$ maka diperoleh $ak \in K$, di sisi lain, $ak \in AK \subseteq N$, sehingga $ak \in N$. Karena N merupakan submodul prima dan $ak \in K$ maka $k \in K$ atau $a \in (N: M)$. Karena diambil sebarang k di submodul K dan a diambil sebarang di subring A, ini berarti $K \subseteq N$ atau $A \subseteq (N: M)$.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Misal M suatu R-modul dan himpunan N merupakan submodul sejati di M. Untuk setiap submodul K di M, subring A di ring R, jika $AK \subseteq N$ maka $K \subseteq N$ atau $A \subseteq (N: M)$. Akan ditunjukkan bahwa N merupakan submodul prima di M. Ambil sebarang $m \in M$ dan $r \in R$ di mana $rm \in N$. Dapat ditunjukkan bahwa $\langle rm \rangle = \{r_1 rm | r_1 \in R\}$ merupakan submodul di N dan $\langle rm \rangle = \langle r \rangle \langle m \rangle$ di mana $\langle r \rangle$ subring di ring R dan $\langle m \rangle$ submodul di M. Perhatikan bahwa $\langle rm \rangle = \langle r \rangle \langle m \rangle \subseteq N$, maka berdasarkan yang telah diketahui diperoleh bahwa $\langle m \rangle \subseteq N$ atau $\langle r \rangle \subseteq (N: M)$, artinya $m \in N$ atau $r \in (N: M)$.

Contoh 2.1 Submodul $p\mathbb{Z}$ di $\mathbb{Z}$-modul $\mathbb{Z}$ merupakan submodul prima, untuk setiap p bilangan prima.

Contoh 2.2 $N = \langle\langle \bar{0} \rangle\rangle$ merupakan submodul prima dari $\mathbb{Z}$-modul $\mathbb{Z}_3$, karena $\forall r \in \mathbb{Z}$ dan $\bar{m} \in \mathbb{Z}_3$ di mana $r\bar{m} \in N$ berakibat $r \in (N: M) = 3\mathbb{Z}$ atau $\bar{m} = \bar{0} \in \mathbb{Z}_3$.

2.2 Submodul Prima Lemah (*Weakly Prime Submodule*)

Salah satu perumuman dari submodul prima yaitu submodul prima lemah. Berikut merupakan definisinya.

Definisi 2.2 [7] Diberikan R-modul M dan $N \leq M$. Submodul N dikatakan submodul prima lemah jika $\forall r \in R$ dan $m \in M$ di mana $rm \in N - \{0\}$, berakibat $m \in N$ atau $r \in (N: M)$.

Definisi 2.3 [8] Diberikan R-modul M dan $N \leq M$. Submodul N dikatakan submodul prima lemah jika untuk setiap submodul K dari M, $a, b \in R$ di mana $abK \subseteq N$ berakibat $aK \subseteq N$ atau $bK \subseteq N$.

Teorema 2.3 [8] Diberikan R-modul M dan $N \leq M$. maka beberapa pernyataan berikut ekuivalen:

i. N merupakan submodul prima lemah.
ii. Diberikan $(N: x) = \{r \in R | rx \in N\}$ dan $(N: y) = \{r \in R | ry \in N\}$. Jika $(N: x) \neq (N: y)$ maka $N = (N + Rx) \cap (N + Ry), \forall x, y \in M$.

Bukti. Lihat referensi [8]

Berdasarkan definisi dan teorema di atas, diperoleh bahwa setiap submodul prima dan submodul nol merupakan submodul prima lemah. Namun, tidak berlaku untuk sebaliknya. Teorema berikut akan menjelaskannya lebih lanjut.

Teorema 2.4 [9] Misalkan N adalah submodul sejati dari R-modul M. Jika N submodul prima maka N pasti merupakan submodul prima lemah.

Bukti. Misalkan N adalah submodul prima dari R-modul M. Akan ditunjukkan N submodul prima lemah. Ambil sebarang submodul S di M, $a, b \in R$ di mana $abS \subseteq N$. Karena $abS \subseteq N$, didapatkan $abs \subseteq N, \forall s \in S$. Oleh karena N submodul prima di M dan $a(bs) \in N, \forall s \in S$ maka $bs \in N, \forall s \in S$, sehingga jelas $bS \subseteq N$. Jika berlaku $r \in (N: M)$, artinya $rM \subseteq N$ sehingga diperoleh $rm \in N$, $\forall m \in M$. Karena $S \subseteq M$ maka otomatis $aS \subseteq N$ terpenuhi. ∎

Berikut merupakan beberapa contoh dari submodul prima lemah.

Contoh 2.3

1. $N = \langle\langle \overline{0} \rangle\rangle$ merupakan submodul prima lemah pada $\mathbb{Z}$-modul $\mathbb{Z}_6$, namun bukan submodul prima karena $\exists 2 \notin (N: M) = 6\mathbb{Z}$ dan $\overline{3} \notin N$ sehingga $\overline{2} \cdot \overline{3} = \overline{0} \in N$.
2. $N = \langle\langle \overline{1} + i \rangle\rangle$ merupakan submodul prima lemah pada $\mathbb{Z}$-modul $\mathbb{Z}_3[i]$ karena $\forall r \in \mathbb{Z}$ dan $\overline{m} \in \mathbb{Z}_3[i]$ dengan $r\overline{m} \in N - \{0\}$ berlaku $r \in (N: M) = 3\mathbb{Z}$ atau $\overline{m} \in N$.

2.3 Submodul Hampir Prima (*Almost Prime Submodule*)

Submodul hampir prima merupakan perumuman dari submodul prima lemah. Berikut diberikan definisinya.

Definisi 2.4 [10] Diberikan R-modul M dan $N \leq M$. Submodul N dikatakan submodul hampir prima jika $\forall r \in R$ dan $m \in M$ di mana $rm \in N - (N: M)N$, berakibat $m \in N$ atau $r \in (N: M)$.

Berdasarkan Definisi 2.4, diperoleh bahwa submodul prima lemah dan submodul prima pasti merupakan submodul hampir prima. Namun, tidak berlaku sebaliknya. Berikut akan diuraikan beberapa contohnya.

Contoh 2.4

1. $N = \langle\langle \overline{4} \rangle\rangle$ merupakan submodul hampir prima dari $\mathbb{Z}$-modul $\mathbb{Z}_{36}$, namun bukan submodul prima lemah karena terdapat $2 \cdot \overline{7} = \overline{14} \neq 0 \in N$ tetapi $2 \notin (N: M) = 4\mathbb{Z}$ dan $\overline{7} \notin N$.

2. $N = \langle\langle\bar{0}\rangle\rangle$ merupakan submodul hampir prima dari $\mathbb{Z}$-modul $\mathbb{Z}_4[i]$ karena $\forall r \in \mathbb{Z}$ dan $m \in M = \mathbb{Z}_4[i]$ dengan $rm \in N - (N{:}\,M)N = N - \{0\}$ berlaku $r \in (N{:}\,M) = 4\mathbb{Z}$ atau $m \in N$.

Berdasarkan Definisi 2.4 juga diperoleh bahwa setiap submodul prima adalah submodul hampir prima, namun submodul hampir prima belum tentu submodul prima. Berikut diberikan contohnya.

Contoh 2.5 $N = \langle\langle\bar{4}\rangle\rangle$ submodul hampir prima dari $\mathbb{Z}$-modul $\mathbb{Z}_{24}$, namun bukan merupakan submodul prima.

Setiap submodul hampir prima harus merupakan submodul prima saat modulnya adalah modul bebas. Sehingga dapat dinyatakan dalam akibat berikut.

Teorema 2.5 [11] Misalkan R-modul bebas M dan N merupakan submodul sejati sedemikian sehingga $dim_R(N) = dim_R(M) = n$. Maka N submodul hampir prima jika dan hanya jika N submodul prima.

Bukti.

Lihat referensi [11]

2.4 Submodul n-Hampir Prima (n-*Almost Prime Submodules*)

Selain submodul hampir prima, perumuman dari submodul prima lainnya yaitu submodul n-hampir prima yang akan dijelaskan lebih lanjut pada definisi berikut.

Definisi 2.5 [2] Diberikan R-modul M dan $N \leq M$. Submodul N dikatakan submodul n-hampir prima jika $\forall r \in R$ dan $m \in M$ dengan $rm \in N \backslash (N{:}\,M)^{n-1}N$, berakibat $m \in N$ atau $r \in (N{:}\,M)$, $\forall n > 1$.

Oleh karena itu, diperoleh beberapa pernyataan berikut yang merupakan konsekuensi dari definisi submodul n-hampir prima.

Teorema 2.5 [12]

i. Misalkan N merupakan submodul sejati dari R-modul M sedemikian sehingga $(N{:}\,M)^{n-1}N = N$. Maka N merupakan n-hampir prima.
ii. Setiap submodul n-hampir prima dari R-modul M merupakan m-hampir prima, dimana $3 \leq n$ dan $1 < m \leq n$.

Bukti. Lihat referensi [12]

Lemma 2.1 [12] Misalkan N submodul n-hampir prima dari M. Jika $\exists x \in M \backslash N$ dan $r \in R \backslash (N{:}\,M)$ di mana $rx \in N$, maka $rN \cup (N{:}\,M)x \subseteq (N{:}\,M)^{n-1}N$.

Bukti.

N merupakan n-hampir prima, $rx \in (N{:}\,M)^{n-1}N$, misalkan y merupakan sebarang unsur dari N. Maka $y + x \notin N$ dan $r(y + x) = ry + rx \in N$ dan karena N merupakan n-hampir prima, $r(y + x) \in (N{:}\,M)^{n-1}N$. Akibatnya, $ry \in (N{:}\,M)^{n-1}N$ dan juga $rN \subseteq (N{:}\,M)^{n-1}N$. Selanjutnya, misalkan s sebarang unsur dari $(N{:}\,M)$. Jelas $r + s \notin (N{:}\,M)$ dan $(r + s)x \in N$ serta N merupakan n-hampir prima, $(r + s)x \in (N{:}\,M)^{n-1}N$. Maka karena $rx \in (N{:}\,M)^{n-1}N$, $sx \in (N{:}\,M)^{n-1}N$. Oleh karena itu, $(N{:}\,M)x \subseteq (N{:}\,M)^{n-1}N$. ∎

2.5 Submodul Primer (*Primary Submodule*)

Pada submodul prima, $r \in (N:M)$ hanya melibatkan r^1 di mana $1 \in \mathbb{N}$. Apabila diperumum menjadi $n \in \mathbb{N}$ sehingga $r^n \in (N:M)$ maka diperoleh definisi dari submodul primer. Lebih lanjut akan dijelaskan pada definisi berikut.

Definisi 2.6 [5] Diberikan R-modul M dan $N \leq M$. Submodul N disebut submodul primer jika $\forall r \in R$ dan $m \in M$ di mana $rm \in N$ berlaku $m \in N$ atau $r^n \in (N:M)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Definisi 2.7 [13] Diberikan R-modul M dan $N \leq M$. Submodul N disebut submodul primer apabila:

a. N merupakan submodul sejati dengan $N \neq M$, dan
b. $re \in N$ dan $e \notin N$ berlaku $r^m M \subseteq N$ untuk suatu m bilangan bulat positif.

Contoh 2.6 $N = \langle\langle 3^2\mathbb{Z}\rangle\rangle$ submodul primer pada $\mathbb{Z}$-modul $\mathbb{Z}$ tetapi $9\mathbb{Z}$ bukan submodul primer di $\mathbb{Z}$ karena $\exists 3 \in \mathbb{Z}$ sehingga $3 \cdot 3 \in 9\mathbb{Z}$ serta $3\mathbb{Z} \nsubseteq 9\mathbb{Z}$ dan $3 \notin 9\mathbb{Z}$.

Teorema 2.7 Misalkan N merupakan submodul primer dari R-modul M. Sehingga $N:M = Ann_R M/N$ merupakan idela prima.

Bukti.

Karena $M \nsubseteq N$, ideal $N:M$ merupakan ideal sejati. Akan tunjukkan $\alpha, \beta \in R$ sedemikian sehingga $\alpha\beta \in (N:M)$, $\beta \notin (N:M)$. Cukup tunjukkan $\alpha^m \in (N:M)$ yaitu $\alpha^m M \subseteq N$ untuk suatu m bilangan bulat positif. Karena $\beta \notin (N:M)$, terdapat $e \in M$ sedemikian sehingga $\beta e \notin N$. Diperoleh $\alpha(\beta e) \in N$, karena $\alpha\beta \in (N:M)$ dan $\beta e \notin N$. Tetapi, N merupakan submodul primer, akibatnya $\alpha^m M \subseteq N$ untuk suatu m bilangan bulat positif. ■

Ucapan Terima Kasih

Terima kasih kepada semua pihak yang telah memberikan dukungan dan masukan serta saran yang berharga untuk perbaikan artikel ini. Semoga artikel ini dapat memberikan kontribusi yang bermanfaat dan menjadi sumber inspirasi bagi para pembacanya.

DAFTAR PUSTAKA

[1] I. G. A. W. Wardhana, "The Decomposition of a Finitely Generated Module over Some Special Ring," *JTAM (Jurnal Teor. dan Apl. Mat.*, vol. 6, no. 2, pp. 261–267, 2022, doi: https://doi.org/10.31764/jtam.v6i2.6769.
[2] S. Moradi and A. Azizi, "n-almost prime submodules," *Indian J. Pure Appl. Math.*, vol. 44, pp. 605–619, 2013.
[3] S. Roman, "Advanced Linear Algebra Third Edition," *Grad. TEXTS Math. YORK-*, vol. 135, 2008.
[4] N. W. Switrayni, *Pengantar Teori Modul*. Mataram: Universitas Mataram Press, 2015.
[5] L. D. Khusnawati, "SUBMODUL PRIMA, SEMIPRIMA, DAN PRIMER DI MODUL DAN MODUL FRAKSI," *Gammath J. Ilm. Progr. Stud. Pendidik. Mat.*, vol. 2, no. 1, pp. 1–10, 2017, doi: https://doi.org/10.32528/gammath.v2i1.363.
[6] J. Dauns, "Prime modules," *J. Reine Angew. Math*, vol. 298, pp. 156–181, 1978.
[7] I. M. A. Hadi, "On Weakly Prime Submodules," *Ibn Al-Haitham J. Pure Appl. Sci.*, vol. 22, no. 3, pp. 183–190, 2009.
[8] A. Azizi, "Weakly prime submodules and prime submodules," *Glas. Math. J.*, vol. 48, no. 2, pp. 343–346, 2006, doi: https://doi.org/10.1017/S0017089506003119.
[9] H. Ihsan, M. Abdy, and S. Alam, "Sifat-sifat Submodul Prima dan Submodul Prima Lemah,"

J. Mat. Comput. Stat., vol. 2, no. 2, pp. 183–188, 2019, doi: https://doi.org/10.35580/jmathcos.v2i2.12581.
[10] H. A. Khashan, "On almost prime submodules," *Acta Math. Sci.*, vol. 32, no. 2, pp. 645–651, 2012, doi: 10.1016/S0252-9602(12)60045-9.
[11] I. G. A. W. Wardhana, P. Astuti, and I. Muchtadi-Alamsyah, "On almost prime submodules of a module over a principal ideal domain," *JP J. Algebr. Number Theory Appl.*, vol. 38, no. 2, p. 121, 2016, doi: https://doi.org/10.17654/NT038020121.
[12] S. Moradi and A. Azizi, "Generalizations of prime submodules," *Hacettepe J. Math. Stat.*, vol. 44, no. 3, pp. 587–595, 2015.
[13] D. G. Northcott, *Lessons on rings, modules and multiplicities*. Cambridge University Press, 1995.