Volume. 1 No 2 Oktober (2024)
e-ISSN: 3062-7737
p-ISSN: xxxx-xxxxx

Semeton Mathematics Journal

Homepage jurnal: http://eigen.unram.ac.id/semeton

Karakteristik Beberapa Submodul dari Suatu Modul
(*Some Characteristics of Submodules of Module*)

M. Afdhaluzzikri[a*], Jinan Ambar[b]

[a] Universitas Mataram, Jl. Majapahit No. 62, Mataram, 83125, Indonesia. Email: abdhalzikri@gmail.com
[b] Universitas Mataram, Jl. Majapahit No. 62, Mataram, 83125, Indonesia. Email: ambarjinan@gmail.com

ABSTRACT

In the context of group cohomology, free modules are used for the construction of projective resolution and torsion modules also have an important role. In invariant theory, independent modules are used to describe polynomial invariants, whereas torsion modules are relevant in the study of modular invariants. In elliptic curve cryptography, torsion points are used for security, with free modules used for arithmetic operations. This article is a review of material about several submodules of a module. This article also discusses the structure and properties of submodules such as torsion, free, indepotent, cyclic, and pure submodules, emphasizing the importance of understanding the various application contexts of free and torsion modules.

Keywords: Module, Submodule, submodules torque, free submodule, cyclic submodule, idempotent submodule and pure submodule.

ABSTRAK

Dalam konteks kohomologi grup, modul bebas digunakan untuk konstruksi resolusi proyekif dan modul torsi juga memiliki peran penting. Dalam teori invariant, modul bebas digunakan untuk menjabarkan invariant polinomial, sedangkan modul torsi relevan dalam studi modular invariant. Dalam kriptografi kurva eliptik, titik-titik torsi digunakan untuk keamanan, dengan modul bebas digunakan untuk operasi aritmetika. Artikel ini merupakan review atas materi tentang beberapa submodul dari suatu modul. Artikel ini juga membahas struktur dan sifat submodul seperti submodul torsi, bebas, indepoten, siklik, dan murni, menekankan pentingnya memahami beragam konteks aplikasi modul bebas dan torsi.

Keywords: Modul, submodul, submodul torsi, submodul bebas, submodul siklik, submodul idempotent, submodul murni.

Diterima: 29-05-2024;
Disetujui: 13-08-2024;
Doi: https://doi.org/10.29303/semeton.v1i2.217

1. Pendahuluan

Teori modul membahas modul bebas dan modul torsi, yang masing-masing memiliki peran penting dalam matematika dan ilmu komputer. Modul bebas, analogi ruang vektor dengan basis, digunakan dalam berbagai bidang seperti teori representasi grup, topologi aljabar, dan kriptografi, memberikan dasar untuk memahami struktur dan simetri. Sementara itu, modul torsi, di mana setiap elemen memiliki urutan terbatas dan memainkan peran penting dalam teori bilangan, aljabar homologi, dan kriptografi kurva eliptik, memberikan pemahaman lebih dalam tentang sifat-sifat grup dan struktur aljabar. Kedua konsep ini, modul bebas dan modul

* Corresponding author
e-mail: abdhalzikri@gmail.com

torsi, memberikan landasan penting untuk memahami berbagai fenomena matematika dan aplikasinya dalam teknologi modern.

Sebagai contoh spesifik, dalam kohomologi grup, modul bebas digunakan untuk membangun resolusi proyekif yang kemudian digunakan untuk menghitung grup kohomologi, sedangkan modul torsi sering muncul dalam konteks ini. Dalam teori invariant, modul bebas digunakan untuk mendeskripsikan semua invariant polinomial, sementara modul torsi relevan dalam studi modular invariant. Dalam kriptografi kurva eliptik, titik-titik torsi digunakan dalam konstruk kriptografi untuk memastikan keamanan dan efisiensi, dengan modul bebas digunakan untuk representasi koordinat dan operasi aritmetika pada kurva. Dengan demikian, konsep modul bebas dan modul torsi memiliki aplikasi luas yang menunjukkan pentingnya memahami struktur dan sifat-sifatnya dalam berbagai konteks.

Konsep modul memperluas gagasan tentang ruang vektor dimana pada modul memungkinkan penggunanan struktur aljabar yang lebih umum seperti gelanggang atau integral domain daripada hanya sekedar dalam ruang lingkup lapangan. Secara formal,modul dapat didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 1.1 [1] Diberikan R gelanggang komutatif dengan elemen satuan dimana elemen dari R disebut dengan skalar. Suatu R-Modul atau Modul atas ring R adalah suatu himpunan tak kosong M dilengkapi dengan dua operasi didalamnya, yaitu operasi penjumlahan yang dinotasikan dengan + , yaitu untuk setiap pasangan $(u, v) \in M \times M$, maka elemen $u + v \in M$ dan operasi perkalian , yaitu untuk setiap pasangan $(r, v) \in R \times M$, maka elemen $rv \in M$. Kemudian lebih jauh, aturan-aturan berikut harus berlaku yaitu.

1) M adalah grup abelian dibawah operasi penjumlahan
2) Untuk setiap $r, s \in R$ dan $u, v \in M$ berlaku

$$r(u + v) = ru + rv$$
$$(r + s)u = ru + su$$
$$(rs)u = r(su)$$
$$1u = u$$

Contoh 1.1 Diberikan R suatu ring, maka himpunan pasangan terurut R^n adalah modul atas ring R dilengkapi operasi penjumlahan dan perkalian skalar dengan definisi sebagai berikut.

$$(a_1 \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$$

dan

$$r(a_1, \dots, a_n) = (ra_1, \dots, ra_n)$$

Untuk $a_i, b_i, r \in R$.

Contoh 1.2 Misalkan R ring, maka himpunan matriks $M_{m\times n,}(R)$ adalah modul atas R dibawah operasi penjumlahan matriks dan perkalian skalar atas R.

Banyak konsep yang ditemui dalam teori grup maupun ruang vektor yang dapat pula didefinisikan dalam teori modul. Salah satu substruktur tersebut adalah submodul. Secara formal, suatu submodul dapat didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 1.2 [1] Suatu submodul atas R-modul M adalah subhimpunan tak kosong S dari M dimana S adalah modul atas R terhadap operasi yang sama dengan M. Submodul S atas M dapat dinotasikan dengan $S \leq M$.

Pada penelitian ini akan dibahas beberapa submodul dari suatu modul tertentu beserta beberapa teoremanya. Adapun beberapa submodul yang akan dibahas adalah submodul torsi, submodul bebas, submodul siklik, submodul idempoten dan submodul murni.

2. Metode

Adapun metode yang diterapkan pada penelitian ini yaitu studi kepustakaan, yaitu studi pustaka terkait dengan beberapa submodul. Adapun sumber pustaka yang dipakai diperoleh dari buku dan jurnal penelitian terdahulu.

3. Hasil dan Pembahasan

Pada bagian ini, akan dbahas beberapa substruktur pada modul.

3.1 Submodul Torsi dan Submodul Bebas

Pada ruang lingkup ruang vektor, suatu ruang vektor V atas lapangan F, suatu himpunan tunggal $\{v\}$, dimana $v \in V, v \neq 0$ adalah bebas linear. Berdasarkan hal tersebut, maka jika $r \neq 0$ berakibat $rv \neq 0$. Fenomena ini tidak berlaku dalam modul. Misalkan $\mathbb{Z}_n$ adalah modul atas $\mathbb{Z}$ dengan perkalian skalar didefinisikan dengan $za = (z.a) \bmod n$, untuk setiap $z \in \mathbb{Z}$ dan $a \in \mathbb{Z}_n$. Perhatikan bahwa $na = 0$ untuk setiap $a \in \mathbb{Z}_n$. Hal ini berakibat tidak ada himpunan tunggal $\{a\}$ yang bebas linear. Sehingga $\mathbb{Z}_n$ bukanlah himpunan yang bebas linear. Dari uraian tersebut, dapat didefinisikan elemen torsi sebagai berikut.

Definisi 3.1.1 [1] Diberikan M adalah modul atas gelanggang R. Suatu elemen tak nol $m \in M$ dimana $rm = 0$ untuk suatu elemen tak nol $r \in R$ disebut dengan **elemen torsi** dari M.

Definisi 3.1.2 [1] Misalkan M modul dan N submodul dari M dinotasikan dengan $N \leq M$. Jika N tidak memuat elemen torsi, maka N adalah **submodul bebas torsi**. Jika setiap elemen modul N adalah elemen torsi, maka N disebut dengan **submodul torsi**. .

Untuk suatu modul M atas ring R, semua elemen torsi dari modul M dinotasikan dengan M_{tor} [2]. Sebagai contoh pada modul $\mathbb{Z}_4$ atas $\mathbb{Z}$, setiap elemen dari modul $\mathbb{Z}_4$ atas $\mathbb{Z}$ adalah elemen torsi atau $M_{tor} = \mathbb{Z}_4$, sehingga modul $\mathbb{Z}_4$ atas $\mathbb{Z}$ adalah modul torsi. Perhatikan contoh berikut ini.

Contoh 3.1.1 Akan ditunjukkan bahwa modul $\mathbb{Z}_n$ atas ring $\mathbb{Z}$ adalah modul torsi. Perhatikan bahwa untuk setiap $a \in \mathbb{Z}_n$, akan selalu terdapat $n \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga berlaku $an = 0$. Maka terbukti bahwa modul $\mathbb{Z}_n$ atas ring $\mathbb{Z}$ adalah modul torsi

Salah satu istilah yang erat kaitannya dengan elemen torsi adalah annihilator. Adapun definisi dari annihilator dapat dilihat pada defínsi berikut.

Definisi 3.1.3 Diberikan M suatu modul. Suatu annihilator dari elemen $v \in M$ didefinisikan sebagai

$$ann(v) = \{r \in R | rv = 0\}$$

dan annihilator dari N submodul dari M didefinisikan dengan

$$ann(N) = \{r \in R \big| rN = \{0\}\}$$

dengan $rN = \{rv | v \in N\}$. Annihilator juga dikenal dengan ideal order.

Contoh 3.1.2 Annhilator di $\mathbb{Z}$-modul $\mathbb{Z}_4$ adalah $4\mathbb{Z}$. Misalkan diberikan $\mathbb{Z}_4$ adalah modul atas $\mathbb{Z}$, maka himpunan $ann(\mathbb{Z}_4)$ adalah

$$\begin{aligned} Ann(\mathbb{Z}_4) &= \{z \in \mathbb{Z} | zm = 0, m \in \mathbb{Z}_4\} \\ &= \{0, \pm 4, \pm 8, \pm 12, \pm 16, \dots\} \\ &= 4\mathbb{Z} \end{aligned}$$

Berikut ini akan diberikan teorema tentang annihilator dari suatu modul

Teorema 3.1.1 [3] Misalkan M adalah modul atas ideal domain utama R dan $x \in M$. Maka $ann(x)$ dan $ann(M)$ merupakan ideal atas ring R, dan pembangun dari $ann(x)$ dan $ann(M)$ disebut orde dari x dan orde dari M.

Bukti: lihat referensi [3]

Kemudian pada teorema berikut akan dijelaskan bahwa himpunan M_{tor} adalah submodul dari M.

Teorema 3.1.2 [4] Misalkan M modul atas domain ideal utama R. Maka himpunan M_{tor} adalah submodul dari M.

Bukti: lihat referensi [4]

Berdasarkan Teorema 3.1.2 tersebut, kita bisa sebut bahwa M_{tor} adalah submodul dari M. Kemudian kita juga dapat mendefinisikan kebalikan dari submodul torsi yaitu submodul bebas torsi.

Definisi 3.1.4 [2] Misalkan M modul atas domain ideal utama R. Maka M adalah modul bebas torsi jika nol adalah satu-satunya elemen torsi pada M.

Seperti yang telah dijelaskan sebelumnya bahwa modul $\mathbb{Z}$ atas $\mathbb{Z}$ adalah modul bebas torsi karena elemen torsi dari $\mathbb{Z}$ hanya himpunan $\{0\}$.

Teorema 3.1.3 [2] Misalkan M adalah modul atas domain ideal utama R, maka modul kouisen M/M_{tor} adalah modul bebas torsi.
Bukti:
Misalkan $x + M_{tor} \in M/M_{tor}$ bukan nol. Apabila $x + M_{tor}$ adalah elemen torsi, maka terdapat $r \neq 0$ sedemikian sehingga berlaku $r(x + M_{tor}) = (0 + M_{tor})$. Akibatnya rx merupakan elemen torsi atau ada suatu $k \neq 0$ sehingga $(kr)x = k(rx) = 0$. Ini berarti bahwa terdapat $kr \in R$ dengan $kr \neq 0$ sedemikian sehingga $(kr)x = 0$ berakibat $x = 0$ dengan x adalah elemen torsi. Maka diperoleh bahwa $x + M_{tor} = 0 + M_{tor}$ (kontradiksi). Karena $x + M_{tor}$ bukan elemen torsi, maka M/M_{tor} modul bebas torsi.

Berikut akan dijelskan beberapa definisi tentang modul bebas. Terlebih dahulu akan diberikan basis dari suatu modul.

Definisi 3.1.5 [1] Misalkan M modul atas R. Suatu subset B dari M adalah basis jika B merentang M dan bebas linear.

Definisi 3.2.2 Misalkan M modul atas R. M dikatakan bebas jika $M = \{0\}$ atau M punya basis. Jika B adalah basis dari M, maka M bebas dari B.

Contoh 3.2.1 Himpunan $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ adalah modul bebas karena memiliki basis yaitu $(1,1)$. Namun himpunan $\mathbb{Z} \times \{0\}$ bukan modul bebas karena tidak memiliki basis.

Teorema 3.1.4 [2] Misalkan M modul bebas torsi yang dibangun terhingga atas domain ideal utama R, maka M adalah modul bebas.

Bukti:

Diberikan M suatu modul yang dibangun oleh $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$. Apabila X bebas linier, jelas bahwa X adalah modul bebas. Misalkan X tidak bebas linier dan P kumpulan himpunan bagian dari X yang bebas linier. Jelas bahwa $P \neq \emptyset$ disebabkan satu dari elemen torsi tak nol haruslah bebas linier. Maka $(P, \subset)$ adalah himpunan terurut parsial. Kemudian apabila B adalah bagian dari P dan G adalah gabungan dari semua himpunan B, maka G merupakan batas atas dari B. Karena B bagian, maka G harus bebas linier. Berdasarkan Lema Zorn, P memuat elemen maksimal, namakan Y. Misalkan $Y = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_r\}$ dengan $r < n$. Maka x_i adalah kombinasi linier dari Y, $\forall\ i > r$, karena tidak dterjadi demikian, maka $Y \cup \{x_i\}$ bebas linier (hal ini kontradiksi dengan Y adalah elemen maksimal dari P. Maka Y juga pembangun dari M. Sehingga diperoleh bahwa M adalah modul bebas.

Modul torsi dan modul bebas memiliki keterkaitan satu sama lain dimana suatu modul dapat diperoleh dari jumlahan langusng dari modul torsi dan modul bebasnya.

Teorema 3.1.5 [2] Misalkan M adalah modul yang dibangun berhingga atas domain ideal utama R. maka berlaku

$$M = M_{tor} \oplus M_{free}$$

dimana M_{tor} adalah submodul torsi dan M_{free} adalah submodul bebas.

Bukti:
Ambil suatu epimorfisma f dari M ke M/M_{tor}, berdasarkan Teorema 3.1.3 dan Teorema 3.1.4 , diperolah bahwa M/M_{tor} adalah modul bebas. Diberikan $B' = \{b_1', b_2', b_3', \dots, b_n'\}$. Basis untuk M/M_{tor} dengan $b_i \in M$ sedemikian sehingga $f(b_i) = b_i'$ untuk setiap i. Maka jelas bahwa $Ker(f) = M_{tor}$. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $B = \{b_1, b_2, b_3, \dots, b_n\}$ bebas linier. Jika $k_1b_1 + k_2b_2 + \cdots + k_nb_n = 0_M$, maka $k_1b_1' + k_2b_2' + \cdots + k_nb_n' = 0_{M/M_{tor}}$. Karena B' suatu basis, akibatnya $k_i = 0$, untuk setiap i. Sehingga B adalah bebas linier. Maka jelas bahwa $spanB$ adalah submodul bebas dari M ketika $M_{free} = spanB$.
Misalkan $a \in M_{free} \cap Ker(f)$, maka $a = c_1b_1 + c_2b_2 + \cdots + c_nb_n$ dan $f(a) = 0$, sehingga $c_1b_1' + c_2b_2' + \cdots + c_nb_n' = 0$. Maka kita peroleh $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$, sehingga $M_{free} \cap Ker(f) = \{0\}$. Kemudian misalkan $x \in M$, maka kita peroleh $(x) = m_1b_1' + m_2b_2' + \cdots + m_nb_n'$, sehingga $x - m_1b_1 + m_2b_2 + \cdots + m_nb_n \in Ker(f)$. Maka kita peroleh bahwa $x = y + m_1b_1 + m_2b_2 + \cdots + m_nb_n$ untuk $y \in Ker(f)$, dan $m_1b_1 + m_2b_2 + \cdots + m_nb_n$ di M_{free}. Sehingga $M = M_{tor} \oplus M_{free}$.

3.2 Submodul Siklik

Pada bagian ini akan dijelaskan tentang submodul silik dari suatu modul. Definisi dari modul siklik diberikan pada Definisi 3.2.1 berikut ini.

Definisi 3.2.1 [1] Diberikan M suatu modul atas ring R. Suatu submodul dengan bentuk

$$\langle v \rangle = Rv = \{rv | r \in R\}$$

Untuk suatu $v \in M$ disebut submodul siklik yang dibangun oleh v.

Setiap ruang vektor yang berdimensi hingga adalah jumlah langsung dari suatu submodul siklik, yaitu subruang dengan satu dimensi.

Contoh 3.2.1 Diketahui ring polinomial $F[x_1, x_2, x_3, \dots]$ adalah modul atas dirinya sendiri. Maka modul $F[x_1, x_2, x_3, \dots]$ dapat dibangun oleh elemen identitas $p(X) = 1$, sedemikian sehingga F adalah modul siklik.

Definisi 3.2.2 [1] Suatu modul M atas R dikatakan dibangun secara terhingga jika memuat suatu himpunan berhingga yang membangun M. Lebih khusus lagi, modul M disebut n-*generated* jika M memiliiki himpunan pembangun yang berukuran n.

3.3 Submodul Idempoten

Pada bagian ini akan dijelaskan submodul Idempotent dari suatu modul. Perhatikan definisi modul perkalian berikut ini.

Definisi 3.3.1 [5] Diberikan R ring dan M modul atas ring R. M dinamakan modul perkalian jika untuk setiap submodul N di M, terdapat ideal I di R sedemikian sehingga berlaku $N = IM$. Dapat juga ditulis $I = [N: M] = \{r \in R | rM \subset N\}$.

Contoh 3.3.1 Akan ditunjukkan bahwa himpunan $\mathbb{Z}$ adalah modul perkalian atas $\mathbb{Z}$. Diketahui bahwa $n\mathbb{Z}$ adalah submodul dari $\mathbb{Z}$. Maka akan ditunjukan untuk setiap submodul $n\mathbb{Z}$ di $\mathbb{Z} -$ modul $\mathbb{Z}$, terdapat ideal $n\mathbb{Z}$ di ring $\mathbb{Z}$ sedemikian sehingga berlaku $n\mathbb{Z} = (n\mathbb{Z})\mathbb{Z}$.

1. Akan ditunjukkan bahwa $n\mathbb{Z} \subseteq (n\mathbb{Z})\mathbb{Z}$

Ambil sebarang $nz \in n\mathbb{Z}$ untuk $z \in \mathbb{Z}$. Maka nz dapat dinyatakan dalam $nz = (n1z)z \in (n\mathbb{Z})\mathbb{Z}$. Akibatnya , berlaku $n\mathbb{Z} \subseteq (n\mathbb{Z})\mathbb{Z}$.

2. Akan ditujukkan bahwa $(n\mathbb{Z})\mathbb{Z} \subseteq n\mathbb{Z}$
   Ambil sebarang $(na)b \in (n\mathbb{Z})\mathbb{Z}$ untuk $a, b \in \mathbb{Z}$. Maka $(na)b$ dapat dinyatakan dalam $(na)b = n(ab) = nz \subseteq n\mathbb{Z}$ untuk suatu $z \in \mathbb{Z}$. Akibatnya berlaku $(n\mathbb{Z})\mathbb{Z} \subseteq n\mathbb{Z}$.

Sehingga diperoleh bahwa $\mathbb{Z} = (n\mathbb{Z})\mathbb{Z}$. Maka terbukti bahwa $\mathbb{Z}$ adalah modul perkalian atas $\mathbb{Z}$.

Teorema 3.3.1 [5] Misalkan M modul atas R. M modul perkalian atas R jika dan hanya jika untuk setiap N submodul di M, berlaku $N = [N: M]M = \{r \in R | (rM)M \subseteq N\}$
Bukti: Lihat Referernsi [5]

Berikut ini akan diberikan definisi dari submodul idempotent.

Definisi 3.3.2 [5] Diberikan R ring dan M suatu modul atas R. Suatu himpunan N submodul atas M adalah submodul idempotent jika dan hanya jika $N = [N: M]N$.

3.4 Submodul Murni

Pada bagian ini akan dijelaskan tentang submodul murni. Terlebih dahulu akan diberikan definisi dari submodul murni.

Definisi 3.4.1 [5] Diberikan R ring, M adalah modul atas ring R dan $N \leq M. N$ disebut submodul murni jika untuk setiap I ideal di R, berlaku $IN = N \cap IM$.

Contoh 3.4.1 Diberikan M suatu modul perkalian atas g R. Akan ditunjukkan $N_1 \oplus N_2 \oplus N_3 \oplus \dots \oplus N_k$ adalah submodul murni yaitu akan ditujukkan untuk setiap ideal I di R berlaku

$$I(N_1 \oplus N_2 \oplus \dots \oplus N_k) = (N_1 \oplus N_2 \oplus \dots \oplus N_k) \cap I(N_1 \oplus N_2 \oplus \dots \oplus N_k)$$

Dengan $N_1, N_2, \dots, N_k$ adalah submodul-submodul di M.
Dalam teori modul kita tahu bahwa jika $N_1 \oplus N_2 \oplus \dots \oplus N_k = M$, artinya $N_1 + N_2 + \dots + N_k = M$ dan $N_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_k = \{0\}$.

1. Ambil sebarang $n \in I(N_1 \oplus N_2 \oplus \dots \oplus N_k)$. Akan ditunjukkan $n \in I(N_1 \oplus N_2 \oplus \dots \oplus N_k) \cap I(N_1 + N_2 + \dots + N_k)$. Karena $n \in I(N_1 \oplus N_2 \oplus \dots \oplus N_k)$, maka $n = rx$, dengan $r \in I$ dan $x \in (N_1 \oplus N_2 \oplus \dots \oplus N_k)$ atau $x = \sum_{i=1}^{k} n_{i,} n_{i,} = N_{i,}$ Selanjutnya

$$n = rx$$
$$n = r\left(\sum_{i=1}^{k} n_{i,}\right)$$
$$n = \left(\sum_{i=1}^{k} rn_{i,}\right)$$
$$n = \left(\sum_{i=1}^{k} n_{j,}\right)$$

   Sehingga $n \in (N_1 \oplus N_2 \oplus N_3 \oplus \dots \oplus N_k)$
   Karena M modul perkalian, maka terdapat ideal I di R sehingga $(N_1 \oplus N_2 \oplus \dots \oplus N_k) = I(N_1 + N_2 + \dots + N_k)$. Selanjutnya $n \in (N_1 \oplus N_2 \oplus \dots \oplus N_k)$ dan $(N_1 \oplus N_2 \oplus \dots \oplus N_k) = I(N_1 + N_2 + \dots + N_k)$ maka $n \in I(N_1 + N_2 + \dots + N_k)$. Karena $n \in (N_1 \oplus N_2 \oplus \dots \oplus N_k)$ dan $n \in I(N_1 + N_2 + \dots + N_k)$ akibatnya $n \in (N_1 \oplus N_2 \oplus \dots \oplus N_k) \cap I(N_1 + N_2 + \dots + N_k)$. Terbukti bahwa $I(N_1 \oplus N_2 \oplus \dots \oplus N_k) \subseteq (N_1 \oplus N_2 \oplus \dots \oplus N_k) \cap I(N_1 + N_2 + \dots + N_k)$
2. Ambil sebarang $n \in (N_1 \oplus N_2 \oplus \dots \oplus N_k) \cap I(N_1 + N_2 + \dots + N_k)$), maka berlaku $n \in (N_1 \oplus N_2 \oplus \dots \oplus N_k)$ dan $n \in I(N_1 + N_2 + \dots + N_k)$. akan ditunjukkan bahwa $n \in I(N_1 \oplus N_2 \oplus \dots \oplus N_k)$. Karena $N_1 + N_2 + \dots + N_k = M = N_1 \oplus N_2 \oplus \dots \oplus N_k$, maka untuk sebarang $n \in I(N_1 + N_2 + \dots + N_k)$ diperoleh $n \in I(N_1 \oplus N_2 \oplus \dots \oplus N_k)$.

Terbukti bahwa $(N_1 \oplus N_2 \oplus \dots \oplus N_k) \cap I(N_1 + N_2 + \cdots + N_k) \subseteq I(N_1 \oplus N_2 \oplus \dots \oplus N_k)$. Berdasarkan 1 dan 2, maka diperoleh bahwa $I(N_1 \oplus N_2 \oplus \dots \oplus N_k) = (N_1 \oplus N_2 \oplus \dots \oplus N_k) \cap I(N_1 \oplus N_2 \oplus \dots \oplus N_k)$ sehingga terbukti bahwa jumlahan langusng N di M adalah submodul murni.

Teorema 3.4.2 [5] Misalkan M modul perkalian atas R. Jika N submodul murni di M, maka N submodul perkalian dan idempotent di M.
Bukti: Lihat Referernsi [5]

DAFTAR PUSTAKA

[1] S. Roman, "Advanced Linear Algebra Third Edition," *Grad. TEXTS Math. YORK-*, vol. 135, 2008.
[2] I. G. A. W. Wardhana, "The Decomposition of a Finitely Generated Module over Some Special Ring," *JTAM (Jurnal Teor. dan Apl. Mat.*, vol. 6, no. 2, pp. 261–267, 2022, doi: https://doi.org/10.31764/jtam.v6i2.6769.
[3] I. G. A. W. Wardhana, P. Astuti, and I. Muchtadi-Alamsyah, "On almost prime submodules of a module over a principal ideal domain," *JP J. Algebr. Number Theory Appl.*, vol. 38, no. 2, p. 121, 2016, doi: https://doi.org/10.17654/NT038020121.
[4] I. G. A. W. Wardhana, P. Astuti, and I. Muchtadi-Alamsyah, "The Characterization of Almost Prime Submodule on the Finitely Generated Module over Principal Ideal Domain," *J. Indones. Math. Soc.*, vol. 30, no. 1, pp. 63–76, 2024, doi: https://doi.org/10.22342/jims.30.1.1396.63-76.
[5] A. A. Titahena, Y. A. Lesnussa, E. R. Persulessy, and D. Patty, "SYARAT PERLU DAN SYARAT CUKUP SUBMODUL PURE PADA MODUL PERKALIAN," *J. Mat. Integr.*, vol. 14, no. 2, pp. 105–112, 2018, doi: https://doi.org/10.24198/jmi.v14.n2.18399.105-112.