Volume. 2 No 1 April (2025)

e-ISSN: 3062-7737
p-ISSN: 3063-2137

Semeton Mathematics Journal

Homepage jurnal: http://eigen.unram.ac.id/semeton

Analisis Submodul dan Sifat Keprimaan dalam Ruang Modul

(Submodule Analysis and Primacy Properties in Module Spaces)

Sefti Fajriatul Musyarrofah[1], I Gusti Yogananda Karang[1], Khairatun Hisan[1], Luzianawati[1*]

[1.] Program Studi Matematika, Universitas Mataram, Indonesia.

ABSTRACT

This study analyzes prime submodules and primality properties in module spaces, fundamental topics in abstract algebra. The primary objective is to determine conditions for prime submodule formation in commutative rings and to examine their relationship with nearly prime submodules. The approach employed involves the decomposition of modules in principal ideal domains, with particular attention given to the concepts of annihilators, submodule orders, and the characteristics of torsion-free quotient modules. The findings indicate that nearly prime submodules can only be regarded as prime submodules in free modules. Furthermore, the module decomposition approach proves effective for gaining a comprehensive understanding of module structures. The concepts of annihilators and submodule orders provide profound insights into the relationships between module elements and ring elements. This study offers significant theoretical contributions to abstract algebra and establishes a foundation for further developments, particularly in applications related to number theory and cryptography.

Keywords: Prime Submodule; Nearly Prime Submodule; Free Module; Torsion-Free Module; Annihilator.

ABSTRAK

Penelitian ini menganalisis submodul prima dan sifat keprimaan dalam ruang modul, aspek penting dalam aljabar abstrak. Fokus utama penelitian ini adalah mengidentifikasi kondisi pembentukan submodul prima dalam ring komutatif dan mengeksplorasi hubungannya dengan submodul hampir prima. Pendekatan menggunakan dekomposisi modul pada domain ideal utama, dengan fokus pada konsep annihilator, orde submodul, dan karakteristik modul hasil bagi bebas torsi. Hasil penelitian menunjukkan bahwa submodul hampir prima hanya dapat dianggap sebagai submodul prima pada modul bebas. Selain itu, pendekatan dekomposisi modul terbukti efektif dalam memahami struktur modul secara menyeluruh. Konsep annihilator dan orde submodul memberikan pandangan yang mendalam terhadap hubungan antara elemen modul dan elemen ring. Studi ini menawarkan kontribusi teoritis yang penting dalam aljabar abstrak dan memberikan landasan untuk pengembangan lebih lanjut, khususnya dalam aplikasi teori bilangan dan kriptografi.

Kata kunci: submodul prima; submodul hampir prima; modul bebas; modul bebas torsi; annihilator

Diterima: 07-01-2025;
Disetujui: 28-04-2025;

doi: https://doi.org/10.29303/semeton.v2i1.262

* Corresponding author
e-mail: g1d022067@student.unram.ac.id

1. Pendahuluan

Aljabar abstrak mempelajari struktur aljabar seperti ring dan modul, dimana ideal dan submodul memiliki peran penting. Ideal adalah subhimpunan ring yang stabil terhadap perkalian oleh elemen ring, digunakan untuk mengeksplorasi pembagian dan struktur faktor. Banyak jenis ideal yang sering dikaji seperti ideal utama, ideal prima, dan ideal maksimal karena memiliki peran kunci dalam teori ring komutatif. Pada 2024, Ambar dan Afdhaluzzikri meneliti submodul prima, prima lemah, hampir prima, dan n-prima. Aljabar komutatif bergantung pada modul untuk mengeksplorasi lokalisasi, dekomposisi primer, dan urutan reguler. Modul-modul merupakan inti dari aljabar homologi, memfasilitasi studi kompleks rantai, urutan eksak, dan funktor turunan [1].

Secara definisi, submodul prima adalah submodul hampir prima, tetapi kebalikannya tidak selalu benar. Ditemukan beberapa kasus, bahwa submodul hampir prima adalah submodul prima seperti pada modul siklik di atas domain ideal utama. Dalam modul yang dihasilkan pada domain ideal utama diberikan pendekatan baru untuk karakterisasi submodul hampir prima yang bukan submodul prima menggunakan beberapa dekomposisi modul, seperti dekomposisi primer dan dekomposisi siklik [2]. Selain itu banyak studi tentang keprimaan dalam submodul, seperti karakterisasi submodul siklik prima [3], karakterisasi submodul hampir prima pada modul bebas, dan submodul hampir prima dan submodul prima lemah pada matriks [4], semuanya menggunakan dekomposisi modul hingga pada domain ideal utama.

Penelitian ini bertujuan menganalisis dan mengidentifikasi syarat-syarat pembentukan ideal k-prima dalam ring serta mengkaji sifat-sifat khusus yang muncul dari struktur modulo. Selain itu, penelitian ini juga bertujuan mengeksplorasi keterkaitan antara ideal k-prima dan ideal lainya dalam ring, dan karakteristik khusus pada ring modulo bilangan prima berpangkat. Dari tujuannya di sebutkan, diharapkan dapat memperluas pemahaman mengenai teori ideal dalam ring komutatif dan sebagai aplikasi dasar dalma bidang teori bilangan & kriptografi.

2. Hasil dan Pembahasan

Dalam studi aljabar abstrak, modul sering digunakan untuk memperluas konsep ruang vektor dengan skalar dari ring. Berikut adalah definisi formal modul atas suatu ring

Definisi 2.1[1] Misalkan R suatu ring komutatif dengan identitas yang elemen-elemennya merupakan skalar. Sebuah modul atas R adalah himpunan tak kosong M, dengan dua operasi yaitu penjumlahan yang dilambangkan dengan $+$ dimana setiap elemen $(u, v) \in M \times M$ terhadap elemen $u + v \in M$, dan perkalian skalar yang menghubungkan elemen $(r, v) \in R \times M$ terhadap elemen $rv \in M$, serta memenuhi aksioma-aksioma berikut:

1) M grup abelian terhadap operasi penjumlahan (aditif abelian)
2) $\forall r, s \in R \, dan \, m, n \in M$ berlaku

$$(r + s)m = rm + sm$$
$$r(m + n) = rm + rn$$
$$(rs)m = r(sm)$$
$$1m = m$$

Oleh karena itu, M disebut modul kiri atas R. Sebaliknya, modul kanan atas R didefinisikan sama dan memenuhi aksioma-aksioma sebelumnya.

Contoh 2.1

1. Himpunan $\mathbb{Z}_n$ merupakan modul atas gelanggang $\mathbb{Z}$
2. Himpunan $\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$ merupakan modul atas gelanggang $\mathbb{Z}_6$ terhadap operasi penjumlahan dan perkalian

Dalam struktur modul, seringkali diperlukan untuk melihat bagian-bagian yang lebih kecil dan terstruktur, yang disebut submodul. Berikut adalah definisi dari submodul

Definisi 2.2 [1] Diberikan R suatu ring dengan elemen satuan dimana M suatu modul atas R, dan $N \subseteq M$ dikatakan submodul dari M apabila N membentuk modul atas R dengan operasi yang sama terhadap M dan dilambangkan dengan $N \leq M$.

Untuk memastikan bahwa sebuah himpunan adalah submodul, terdapat beberapa syarat khusus yang harus dipenuhi. Syarat-syarat tersebut dirangkum dalam definisi berikut.

Definisi 2.3 [1] Misalkan N merupakan subhimpunan dari R $-$modul M. N merupakan submodul dari M jika dan hanya jika memenuhi dua aksioma berikut

1. $n_1 - n_2 \in N, \forall n_1, n_2 \in N$
2. $rn \in N, \forall n \in N, \forall r \in R$

Contoh 2.2 Himpunan $2\mathbb{Z}_6 = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\}$ merupakan submodul dari $\mathbb{Z}_6$ $-$modul $\mathbb{Z}_6$

Teorema 2.1 Misalkan N adalah subhimpunan dari R $-$modul M. Dapat dikatakan bahwa N merupakan submodul dari M jika dan hanya jika dua syarat berikut terpenuhi:

1. Untuk setiap $n_1, n_2 \in N$ hasil pengurangan $n_1 - n_2$ termasuk dalam N
2. Untuk setiap $n \in N$ dan setiap $r \in R$, hasil perkalian $r.n$ termasuk dalam N

Teorema ini membantu kita mengidentifikasi kondisi yang perlu dan cukup untuk sebuah himpunan menjadi submodul dari modul tertentu. Berikut adalah pernyataannya

Bukti ($\Rightarrow$) Diketahui bahwa $N \subseteq M$. Karena N merupakan subset dari M, maka N juga subgroup dari M. Dengan demikian, untuk setiap elemen $n_1, n_2 \in N$, berlaku $n_1 - n_2 \in N$. Selain itu, karena $N \in M$ operasi perkalian skalar juga berlaku di M dan N. Akibatnya $\forall r \in R$ dan $n \in N$ berlaku $rn \in N$.

($\Leftarrow$) Diketahui bahwa $\forall n_1, n_2 \in N$ berlaku $n_1 - n_2 \in N$. Hal ini meunjukkan bahwa $N \subseteq M$. Selanjurnya karena M adalah modul yang bersifat abelian, maka N juga bersifat abelian, sehingga N adalah subgroup abelian dari M. Selain itu, untuk setiap $r \in R$ dan $n \in N$, operasi skalar rn yang berlaku di M juga berlaku di N. Dengan demikian, sifat-sifat operasi modul berikut terpenuhi:

$$r(u + v) = ru + rv$$
$$(r + s)u = ru + su$$
$$(rs)u = r(su)$$
$$1u = u$$

Dalam teori modul, konsep annihilator digunakan untuk menggambarkan hubungan antara elemen-elemen modul dengan elemen-elemen ring. Berikut definisinya

Definisi 2.4 [5] Misalkan M atas R-modul. Annihilator dari elemen $v \in M$ adalah

$$Ann\,(v) = \{r \in R \mid rv = 0\}$$

dan annihilator dari submodul N di M adalah

$$ann\,(N) = \{\{r \in R \mid rN = \{0\}$$

dimana $rN = \{rv \mid v \in N\}$. Annihilator juga disebut sebagai orde ideal.

Contoh 2.3 Misalkan $\mathbb{Z}_6$ adalah Z $-$modul, maka $Ann(\mathbb{Z}_6) = \{\overline{2}\}$

Teorema 2.2 [6] Misalkan M adalah modul atas ideal R, dimana $x \in M$. Annihilator $ann(x)$ dan $ann(M)$ adalah ideal dari R. Generator dari $ann(x)$ disebut orde dari x, sedangkan generator dari $ann(M)$ disebut orde dari M.

Bukti Lihat refrensi [6]

Orde dari submodul sering kali penting dalam menentukan sifat-sifat modul tersebut. Berikut adalah definisi dari orde submodul:

Definisi 2.5 [6] Misalkan R adalah ideal utama dan M adalah suatu R −modul. Jika N adalah submodul M, maka sebarang pembangun dari $ann(N)$ disebut orde dari N.

Contoh 2.4 Diberikan Modul M di $\mathbb{Z}_{12} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{11}\}$, dengan $N = < 3 > = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}\}$ sehingga:

$$ann(\mathbb{Z}_{12}) = \{\overline{4}\}$$

Maka orde N adalah 4

Modul primer adalah salah satu jenis modul yang memiliki karakteristik unik terkait dengan perpangkatan bilangan prima. Berikut definisinya

Definisi 2.6 [6] Misalkan p adalah bilangan prima di R. Suatu modul dikatakan modul primer apabila bentuk dari ordenya perpangkatan p (p^k) untuk suatu $k \in \mathbb{Z}$.

Contoh 2.5 $\mathbb{Z}_7$ modul atas $\mathbb{Z}$ merupakan modul prima

Teorema ini menggambarkan bagaimana modul primary dapat diuraikan menjadi submodul-submodul dengan karakteristik tertentu. Berikut pernyataan teoremanya

Teorema 2.3 [2] Misalkan M adalah modul primary atas sebuah ring domain ideal utama. Modul M memiliki orde p^k dan dapat ditulis sebagai penjumlahan langsung:

$M =< v_1 > \oplus .... \oplus < v_n >$,

Dengan setiap submodul siklik $< v_i >$memiliki annihilator ann $(< v_i >) =< p^k >$, dimana indeks e memenuhi $e_1 \geq e_2 \geq \cdots \geq e_n$.

Selanjutnya, untuk setiap submodul tak nol N yang berbentuk

$N = < p^{f_1} v_1 > \oplus \ldots \oplus < p^{f_n} v_n >$

Dengan $0 \leq f_i \leq e_i$ untuk semua i, submodul N akan menjadi submodul prima jika dan hanya jika dua kondisi berikut terpenuhi:

1. Setiap f_i bernilai tidak lebih dari satu ($f_i \leq 1$) untuk semua i
2. Terdapat setidaknya satu indeks j sehingga $f_j = 1$

Submodul prima merupakan konsep lanjutan dalam modul yang memiliki syarat khusus terkait elemen modul dan ring. Berikut adalah definisinya

Definisi 2.7 [7] Misalkan M adalah modul atas ring R, submodul $N \neq M$ disebut submodul prima jika $rm \in N$ dengan $r \in R$ dan $m \in M$ mengakibatkan $m \in N$ atau $r \in (N: M) = \{r \in R | rM \subseteq N\}$.

Contoh 2.6 Misalkan modul $M = \mathbb{Z}_{12}$ atas $R = \mathbb{Z}$ dengan submodul $N = \ll 0 \gg$, karena $\forall r \in R$ dan $m \in M$ berakibat $m \in N$ atau $r \in (N: M) = 12\mathbb{Z}$.

Untuk kasus tertentu, submodul dapat dikategorikan sebagai submodul prima lemah yang memiliki sifat sedikit berbeda dari submodul prima. Berikut adalah definisinya

Definisi 2.8 [8] Misalkan N submodul sejati dari R −modul M. N dikatakan submodul prima lemah jika $\forall r \in R$ dan $\forall m \in M$ dengan $rm \in N - \{0\}$, maka $r \in (N: M)$ atau $m \in N$.

Definisi 2.9 [9] Misalkan N submodul sejati dari R −modul M. N dikatakan submodul hampir prima jika $\forall r \in R$ dan $\forall m \in M$ dengan $rm \in N - (N: M)N$, maka $r \in (N: M)$ atau $m \in N$.

Definisi 2.10 [6] Misalkan R-Modul M. Sebuah elemen tak nol $v \in M$ dimana $rv = 0$ untuk $r \in R$ tak nol dikatakan unsur torsi.

Modul torsi adalah jenis modul yang elemen-elemennya bersifat khusus terkait operasi skalar. Berikut adalah definisinya

Definisi 2.10 [6] Misalkan R-Modul M. Jika semua elemen M adalah unsur torsi maka M disebut modul torsi. Himpunan semua elemen torsi di M dengan elemen nol dinotasikan dengan M_{tor}.

Teorema berikut ini memperjelas bagaimana modul torsi dapat memiliki dekomposisi primer dalam domain ideal utama

Teorema 2.4 [8] Misalkan M adalah modul torsi di atas domain ideal utama (D), yang memiliki dekomposisi primernya.

$$M = M_{p1} \oplus \ldots . \oplus M_{pk}$$

Dan

$$N = N_1 \oplus \ldots . \oplus N_k$$

Dengan $N_i = \langle\langle p_i^{f_{i,1}} v_{i,1} \rangle\rangle \oplus \ldots . . \oplus \langle\langle p_i^{f_{i,n_i}} v_{i,n_i} \rangle\rangle$. Submodul N adalah prima jika dan hanya jika terdapat m unik sehingga

$$N = M_{p1} \oplus \ldots \oplus N_m \oplus \ldots M_{pk}$$

Dengan N_m adalah submodul prima dari M_{pm}

Berdasarkan artikel Wardhana *et al* tahun 2016 membahas pembuktian dari **Teorema 2.4** dengan memisalkan suatu $N = N_1 \oplus N_2 \oplus \ldots \oplus N_k$ suatu submodul prima dari M.

Dalam modul hasil bagi, terdapat sifat bebas torsi yang menjadi ciri khasnya. Berikut adalah definisi konsep tersebut:

Definisi 2.11 [6] Jika M adalah modul di atas domain ideal utama (PID) R, maka hasil bagi modul M/M_{tor} bersifat bebas torsi.

Bukti Misalkan elemen $x + M_{tor}$ di dalam M/M_{tor} tidak nol. Jika x adalah elemen torsi, maka terdapat $r \neq$ sehingga $rx + M_{tor} = 0 + M_{tor}$. Ini berarti rx adalah elemen torsi. Selanjutnya, ada $k \neq 0$ sehingga $k(rx) = 0$. Dengan kata lain, $(kr)x = 0$, sehingga x adalah elemen torsi. Namun, ini berkontradiksi dengan asumsi awal bahwa $x + M_{tor}$ bukan nol di dalam hasil bagi. Oleh karena itu, M/M_{tor} bebas torsi.

Teorema berikut ini menunjukkan hubungan antara modul bebas torsi dengan modul bebas yang dihasilkan hingga

Teorema 2.5 Jika M adalah modul bebas torsi yang dihasilkan hingga di atas domain ideal utama R, maka M adalah modul bebas.

Bukti Misalkan M dihasilkan oleh himpunan $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Jika himpunan ini bebas linear, maka M jelas merupakan modul bebas. Jika tidak, anggap bahwa X bersifat linear-independen.

Definisikan P sebagai kumpulan himpunan bebas linear dari X. Karena 0 bukan elemen torsi, maka P tidak kosong. Dengan menggunakan Lemma Zorn, terdapat himpunan maksimal Y di dalam P. Jika Y tidak mencakup semua elemen X, maka kita bisa menambahkan lebih banyak elemen untuk membentuk himpunan yang lebih besar dan tetap linear-independen, yang bertentangan dengan sifat maksimal dari Y. Oleh karena itu, Y adalah modul bebas.

Teorema 2.6 [6] Jika M adalah modul yang dihasilkan atas domain ideal utama R, maka

$$M = M_{tor} \oplus M_{free}$$

di mana M_{free} adalah submodul bebas, dan M_{tor} adalah submodul torsi dari M.

Bukti Lihat refrensi [6]

Submodul prima memiliki karakteristik penting dalam struktur modul dan sering digunakan untuk memahami sifat-sifat modul lebih lanjut. Berikut adalah definisinya

Definisi 2.12. [10] Submodul N adalah submodul prima jika untuk setiap $r \in R$ dan $m \in M$ sedemikian sehingga $rm \in N$, maka berlaku $r \in (N : M)$ atau $m \in N$.

Teorema dibawah ini memberikan kriteria yang ekuivalen untuk sebuah submodul sejati menjadi submodul prima

Teorema 2.7 Diberikan N sebagai submodul sejati dari R-modul M dan $(N: M) = AnnR(M/N)$, yang merupakan ideal dalam ring$R$. Maka, pernyataan berikut ini ekuivalen:

1. N adalah submodul prima.
2. Setiap submodul tak nol dari R-modul M/N memiliki annihilator yang sama, yaitu $(N: M)$.
3. Untuk setiap submodul S dari M dan subring A dari R, berlaku $AS \subseteq N$ jika dan hanya jika $S \subseteq N$ atau $(N: M)$.

Bukti. Lihat refrensi [1]

Konsep submodul hampir prima memperluas ide dari submodul prima dengan beberapa relaksasi sifat. Berikut adalah definisinya

Definisi 2.13 Submodul N adalah submodul hampir prima jika untuk setiap $r \in R$ dan $m \in M$ sedemikian sehingga $rm \in N - (N: M)\, N$, maka berlaku $r \in (N: M)$ atau $m \in N$.

Dari definisi diatas diketahui bahwa submodul prima selalu merupakan submodul hampir prima. Namun, sebaliknya tidak selalu berlaku. Setiap submodul hampir prima akan menjadi submodul prima jika modulnya adalah modul bebas. Oleh karena itu, hal ini dapat dinyatakan dalam bentuk teorema berikut.

Teorema berikut ini menunjukkan hubungan antara submodul hampir prima dan submodul prima pada modul bebas

Teorema 2.8 Misalkan M adalah R-modul bebas, dan N merupakan submodul sejati dari M dengan $dim_R(N) = dim_R(M) = n$. Maka, N adalah submodul hampir prima jika dan hanya jika M adalah submodul prima.

Bukti Lihat refrensi [2]

3. Kesimpulan

Penelitian ini menunjukkan bahwa submodul hampir prima memiliki sifat unik yang membedakannya dari submodul prima, kecuali pada modul bebas. Melalui dekomposisi modul pada domain ideal utama, penelitian ini berhasil memperlihatkan cara yang efektif untuk mengidentifikasi syarat keprimaan submodul. Konsep seperti annihilator dan orde submodul terbukti memberikan wawasan yang signifikan mengenai hubungan elemen-elemen dalam modul dan ring. Selain itu, modul hasil bagi bebas torsi menunjukkan keterkaitannya yang erat dengan modul bebas, sehingga dapat mendukung pengembangan lebih lanjut dalam teori modul. Penelitian ini memberikan dasar teoretis yang kuat untuk studi lanjutan dalam aljabar abstrak, khususnya pada penerapan teori bilangan dan kriptografi.

DAFTAR PUSTAKA

[1] J. Ambar and M. Afdhaluzzikri, “Studi Keprimaan dalam Modul : Submodul Prima , Prima Lemah , Hampir Prima , dan ? - Hampir Prima . (Study of Primality in Modules : Prime , Weakly Prime , Almost Prime , and ? -Almost Prime Submodules),” no. 2, 2024.

[2] I. G. A. W. Wardhana, P. Astuti, and I. Muchtadi-Alamsyah, “The Characterization of Almost Prime Submodule on the Finitely Generated Module over Principal Ideal Domain,” *Journal*

of the Indonesian Mathematical Society, vol. 30, no. 1, pp. 63–76, 2024, doi: 10.22342/jims.30.1.1396.63-76.

[3] R. Juliana, I. G. A. W. Wardhana, and Irwansyah, "Some Characteristics of Cyclic Prime, Weakly Prime and Almost Prime Submodule of Gaussian Integer Modulo over Integer," *AIP Conf Proc*, vol. 2329, no. February, 2021, doi: 10.1063/5.0042586.

[4] I. G. A. W. Wardhana, N. W. Switrayni, and Q. Aini, "Eigen Mathematics Journal Submodul Prima Lemah dan Submodul Hampir Prima Pada Z-modul M2(Zn)," *Eigen Mathematics Journal*, vol. 1, no. 1, pp. 28–30, 2018.

[5] M. Afdhaluzzikri and J. Ambar, "Karakteristik Beberapa Submodul dari Suatu Modul (Some Characteristics of Submodules of Module)," no. 2, 2024.

[6] I. G. A. W. Wardhana, "The Decomposition of a Finitely Generated Module over Some Special Ring," *JTAM (Jurnal Teori dan Aplikasi Matematika)*, vol. 6, no. 2, pp. 261–267, 2022, doi: 10.31764/jtam.v6i2.6769.

[7] D. I. Modul and D. A. N. Modul, "SUBMODUL PRIMA , SEMIPRIMA , DAN PRIMER," vol. 2, pp. 1–10, 2017.

[8] I. G. A. W. Wardhana, P. Astuti, and I. Muchtadi-Alamsyah, "The Characterization of Almost Prime Submodule on the Finitely Generated Module over Principal Ideal Domain," *Journal of the Indonesian Mathematical Society*, vol. 30, no. 01, pp. 63–76, 2024.

[9] H. A. Khashan, "On almost prime submodules," *Acta Mathematica Scientia*, vol. 32, no. 2, pp. 645–651, Mar. 2012, doi: 10.1016/S0252-9602(12)60045-9.

[10] S. Prima, P. Lemah, D. A. N. Hampir, D. Modul, M. Bilangan, and B. Modulo, "Submodul prima, prima lemah dan hampir prima dari modul matriks bilangan bulat modulo," vol. 08, no. 02, pp. 136–141, 2024.