Volume. 2 No 1 April (2025)

e-ISSN: 3062-7737
p-ISSN: 3063-2137

Semeton Mathematics Journal

Homepage jurnal: http://eigen.unram.ac.id/semeton

Eksplorasi Modul Noetherian

(*Exploration of Noetherian Modules*)

Ashadul Umam[1]*, Mifftahurrahman[1], Lia Fitta Pratiwi[1]

[1.] Program Studi Matematika, Universitas Mataram, Indonesia.

ABSTRACT

Noetherian Modules are a fundamental concept in algebra, providing a structured framework for studying algebraic structures. These modules satisfy the ascending chain condition (ACC), which ensures that every ascending chain of submodules terminates after a finite number of steps. This article explores the definition, key properties, and applications of Noetherian modules in ring theory, homological algebra, and algebraic topology. Through this discussion, it is demonstrated that Noetherian Modules play a crucial role in analyzing ideal structures and more complex algebraic representations. The article also provides concrete examples to illustrate the properties and significance of Noetherian modules across various branches of algebra.

Keywords: *Noetherian modules, ascending chain condition, ring theory, homological algebra, algebraic topology.*

ABSTRAK

Modul Noetherian adalah salah satu konsep penting dalam aljabar yang digunakan untuk mempelajari struktur aljabar dengan lebih terorganisir. Modul ini memenuhi kondisi rantai naik (*ascending chain condition*), yang berarti setiap rantai naik submodul akan berhenti setelah sejumlah langkah tertentu. Artikel ini membahas definisi, sifat-sifat utama, dan aplikasi Modul Noetherian dalam teori cincin, aljabar homologi, serta topologi aljabar. Melalui pembahasan ini, diperlihatkan bahwa Modul Noetherian memainkan peran penting dalam analisis struktur ideal dan representasi aljabar yang lebih kompleks. Artikel ini juga menyajikan beberapa contoh konkret yang membantu memahami sifat dan peran Modul Noetherian dalam berbagai cabang aljabar.

Keywords: Modul Noetherian, kondisi rantai naik, teori cincin, aljabar homologi, topologi aljabar.

Diterima: 07-01-2025;
Disetujui: 24-04-2025;

Doi: https://doi.org/10.29303/semeton.v2i1.263

1. Pendahuluan

Dalam teori aljabar, modul merupakan generalisasi dari ruang vektor yang memiliki peran penting dalam memahami struktur aljabar, terutama dalam teori cincin dan ideal. Modul Noetherian adalah salah satu jenis modul yang sangat dipelajari karena sifatnya yang terorganisir, memungkinkan analisis lebih mudah terhadap struktur aljabar yang kompleks. Modul ini dinamai berdasarkan Emmy Noether, seorang matematikawan yang memberikan kontribusi besar dalam aljabar komutatif.

* Corresponding author
e-mail: g1d022020@student.unram.ac.id

Sebuah modul dikatakan Noetherian jika memenuhi kondisi rantai naik (*ascending chain condition* atau ACC), yaitu setiap rantai naik submodul berhenti setelah beberapa langkah tertentu [1]. Dengan kata lain, tidak ada urutan submodul yang tak terbatas dalam modul tersebut. Sifat ACC ini memberikan struktur yang terorganisir, membedakan Modul Noetherian dari jenis modul lainnya.

Modul Noetherian sangat erat kaitannya dengan modul Artin, yaitu modul yang memenuhi kondisi rantai turun (*descending chain condition* atau DCC), pada kasus khusus modul bisa memenuhi dua kondisi ACC dan DCC sekaligus yang dinamakan modul uniserial [2], [3]. Modul Noetherian tidak hanya penting dalam teori cincin, tetapi juga menjadi landasan dalam pengembangan teori ideal primer. Seperti dijelaskan oleh [4], Modul Noetherian menyediakan struktur yang diperlukan untuk mendefinisikan dekomposisi primer pada ideal-ideal dalam aljabar komutatif, yang merupakan bagian krusial dalam studi dimensi dan struktur skema. Keterkaitan antara modul dan cincin Noetherian tercermin dalam berbagai teorema fundamental, seperti yang dijelaskan oleh A. Banerjee, di mana sifat-sifat cincin Noetherian memungkinkan pengembangan teori yang mendalam dalam analisis struktur ideal [5].

Dalam teori ideal, Modul Noetherian memberikan wawasan tentang struktur ideal dalam cincin serta bagaimana ideal-ideal tersebut berinteraksi. S. Prakash dan A. K. Chaturvedi mencatat bahwa Modul Noetherian sering digunakan untuk memahami sifat ideal dalam aljabar komutatif [6]. Selain itu, Modul Noetherian juga memainkan peran penting dalam teori representasi, di mana strukturnya membantu menganalisis representasi aljabar yang lebih kompleks [7].

Aplikasi Modul Noetherian meluas ke berbagai bidang, termasuk aljabar homologi dan topologi aljabar. Dalam aljabar homologi, Modul Noetherian membantu memahami struktur kelompok homologi dan kohomologi. Dalam topologi aljabar, konsep ini digunakan untuk menganalisis ruang topologis dengan struktur aljabar tertentu. E. Matlis menunjukkan bahwa Modul Noetherian berperan penting dalam mempelajari modul injektif, yang relevan dalam teori homologi dan kohomologi [8] . Sebagai perkembangan lain, *Cuadra et al.* mempelajari kondisi graded-almost Noetherian pada ring dan modul, yang relevan dalam studi struktur coalgebra dan topologi aljabar. Hasil ini menunjukkan bahwa keberadaan struktur Noetherian dalam setting topologi juga penting untuk memahami kestabilan kategori modul dalam konteks yang lebih luas [9].

Artikel ini bertujuan untuk mengeksplorasi lebih dalam tentang Modul Noetherian, mulai dari definisi dasar, sifat utama, hingga aplikasinya dalam teori cincin dan modul. Kami juga akan membahas berbagai teorema penting dan menyajikan contoh-contoh aplikasi Modul Noetherian dalam aljabar komutatif dan aljabar homologi.

2. Hasil dan Pembahasan

Pada bagian ini, akan dibahas konsep dasar Modul Noetherian yang menjadi fokus utama dalam penelitian ini. Modul Noetherian merupakan modul yang memenuhi kondisi rantai naik (*ascending chain condition*) pada submodulnya. Pemahaman tentang definisi ini sangat penting untuk menggali lebih jauh sifat-sifat utama Modul Noetherian serta relevansinya dalam struktur aljabar. Berikut adalah definisi formal dari Modul Noetherian:

Definisi 2.1 [10] Suatu modul dikatakan sebagai Modul Noetherian apabila modul tersebut memenuhi kondisi rantai naik (*ascending chain condition*) atas submodul-submodulnya di M yaitu $N_1 \subseteq N_2 \subseteq N_3 \subseteq \cdots$, sehingga terdapat k bilangan bulat positif, sehingga $N_k \subseteq N_k + 1 \subseteq N_k + 2 \subseteq \cdots \subseteq N_k + n$.

Lema 2.1 [11] Misalkan R adalah M-modul dengan $S_1 \subseteq S_2 \subseteq S_3 \subseteq \cdots$ adalah barisan naik, submodul-submodul dari M pada suatu saat akan konstan. Maka $S = U_j S_j$ juga merupakan submodul dari M.

Berikut diberikan syarat cukup dan perlu suatu R-modul merupakan Modul Noetherian, yang menjadi salah satu kriterian suatu modul agar menjadi Modul noetherian

Teorema 2.1 [10] M-modul R dikatakan Noetherian jika dan hanya jika untuk setiap submodul dari M merupakan submodul yang dibangkitkan secara berhingga (*finitely generated).*

Bukti. Misalkan setiap submodul dari M dibangkitkan secara berhingga dan misalkan barisan naik submodul dari M adalah $S_1 \subseteq S_2 \subseteq S_3 \subseteq \cdots$ berdasarkan Lema 2.1 himpunan $S = U_j S_j$ membentuk submodul dari M. Sehingga menurut premis, S merupakan submodul yang dibangkitkan secara berhingga, misalkan S ditulis sebagai $\ll u_1, u_2, \ldots, u_n \gg$. Karena $U_i \in S$ maka terdapat $K_i \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $K_i \in S_{ki}$. Dengan memilih suatu k yang merupakan nilai maksimum dari $\{k_1, k_2, \ldots, k_n\}$, $k = \max\{k_1, k_2, \ldots, k_n\}$, $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \in S_k$. Sehingga diperoleh S $\ll u_1, u_2, \ldots, u_n \gg \subseteq S_k \subseteq S_{k+1} \ldots \subseteq U_j S_j \subseteq S$. Hal tersebut menunjukkan sebarang barisan submodul naik $S_1 \subseteq S_2 \subseteq S_3 \subseteq \cdots$ pada suatu saat akan konstan. Terbukti bahwa M merupakan Modul Noetherian.

Contoh 2.1 Bilangan bulat $\mathbb{Z}$ adalah Modul Noetherian karena setiap idealnya dihasilkan oleh satu elemen (ideal utama). Dalam konteks ini $\mathbb{Z}$ sebagai modul atas dirinya sendiri memenuhi properti rantai naik (*ascending chain condition).*

Misalkan $R = \mathbb{Z}$ (cincin bilangan bulat) dan $M = \mathbb{Z}$ juga sebagai modul atas dirinya sendiri. Kita akan menunjukkan bahwa adalah Modul Noetherian.

Setiap submodul N dari M adalah ideal Z. Dalam bilangan bulat, semua ideal bersifat utama, artinya ideal tersebut dapat dihasilkan oleh satu elemen, yaitu bentuk $n\mathbb{Z}$ untuk $n \in \mathbb{Z}$. Karena setiap ideal $n\mathbb{Z}$ dapat dinyatakan sebagai himpunan elemen kelipatan dari n, maka tidak mungkin ada rantai naik submodul $N_1 \subseteq N_2 \subseteq \cdots N_1$ yang tidak berhenti.

Artinya, bilangan bulat $\mathbb{Z}$ memenuhi kondisi rantai naik (*Ascending Chain Condition*) pada submodul-submodulnya. Oleh karena itu, $\mathbb{Z}$ adalah Modul Noetherian.

Dari contoh di atas, kita dapat memahami bagaimana Modul Noetherian memenuhi kondisi rantai naik (Ascending Chain Condition) pada submodul-submodulnya. Hal ini menjadi salah satu ciri utama Modul Noetherian yang membuatnya menarik untuk dipelajari lebih lanjut. Berikutnya, kita akan melihat teorema penting yang berkaitan dengan sifat Modul Noetherian, yaitu bagaimana sifat ini juga diwariskan kepada submodul-submodulnya.

Teorema 2.2 [10] Setiap submodul dari Modul Noetherian adalah Submodul Noetherian.

Bukti. Misal M adalah Modul Noetherian dan N adalah submodul dari M. Untuk semua submodul dari N adalah submodul dari M juga, sehingga untuk setiap kondisi rantai naik dari submodul-submodul dari N adalah kondisi rantai naik dari submodul-submodul dari M. Akibatnya, jika M adalah Modul Noetherian, maka N juga Noetherian.

Teorema di atas menunjukkan bahwa sifat Noetherian pada modul juga dimiliki oleh submodulnya, yang menegaskan kestabilan struktur dalam Modul Noetherian. Untuk memperluas pemahaman, kita akan mendefinisikan elemen maksimal dalam sebuah poset, yang menjadi dasar untuk pembahasan teorema berikutnya.

Definisi 2.2 [10] Misalkan P sebagai poset. Element $m \in P$ disebut Sebagian elemen maksimal di P jika $x \in P$ dan $x \geq m$ maka $m = x$.

Teorema 2.3 [10] Diberikan R ring dan M adalah suatu R-modul. Jika M Modul Noetherian, maka setiap himpunan tak kosong S yang anggota-anggotanya adalah submodul-submodul dari M mempunyai elemen maksimal.

Bukti. lihat [10]

Selain Modul Noetherian terdapat modul hampir Noetherian. Dimana define dari modul hampir Noetherian sebagai berikut.

Definisi 2.3 [12] Sebuah R-modul M disebut modul hampir Noetherian jika setiap submodul sejati di M dibangkitkan secara berhingga .

Teorema 2.4 [13] Misalkan R adalah sebuah ring, M adalah R-modul dan $R' = \{r \in R | rM \neq M\}$. Jika M adalah modul hampir Noetherian, maka M adalah (R')-Noetherian .

Bukti. Untuk setiap $r \in R'$ dan setiap submodul N dari M,

$$rN \subseteq Fr \subseteq N$$

Maka, M adalah modul hampir Noetherian, rN adalah sebuah submodul sejati yang dibangkitkan secara berhingga di M. Sehingga, untuk setiap submodul N dari M terdapat $r \in R'$ dan submodul yang dibangkitkan secara berhingga. $F = rN$ dari M. Sedemikian sehingga,

$$rN \subseteq Fr \subseteq N$$

Jadi, M adalah modul (R')-Noetherian.

Definisi 2.4 [12] Diberikan R adalah sebuah ring dan M adalah sebuah R-modul, M dikatakan sebuah modul r-Noetherian jika setiap r-submodul dari M dibangkitkan secara berhingga.

Teorema 2.5 [14] Misalkan M adalah modul hampir Noetherian namun bukan Noetherian.

1. Untuk sebarang $x \in R$ maka $xM = 0$ atau $xM = M$.
2. $Ann(M)$ adalah ideal prima dari R dan M adalah modul bebas torsi pada integral domain $R/Ann\ (M)$.

Bukti. Lihat [14]

3. Kesimpulan

Modul Noetherian merupakan generalisasi ruang vektor yang memberikan kerangka kerja penting untuk memahami struktur aljabar. Sifat utama Modul Noetherian, yaitu memenuhi kondisi rantai naik (*ascending chain condition*), menjadikannya alat yang efektif dalam analisis struktur cincin dan ideal dalam aljabar komutatif. Modul ini juga memainkan peran signifikan dalam teori representasi, aljabar homologi, dan topologi aljabar. Melalui berbagai teorema yang terkait, sifat Modul Noetherian dapat diwariskan kepada submodulnya, yang menegaskan pentingnya modul ini dalam studi aljabar yang lebih lanjut.

4. Ucapan Terima Kasih

Penulis menyampaikan terima kasih kepada semua pihak yang telah memberikan dukungan selama proses penelitian dan penulisan artikel ini. Terima kasih khusus kepada Universitas Mataram atas fasilitas dan dukungan akademik yang diberikan, serta kepada para rekan sejawat yang telah memberikan masukan berharga selama penyusunan artikel ini.

DAFTAR PUSTAKA

[1] J. Adedoyin, “Noetherian rings and modules,” *A Primer of Algebraic D-Modules*, no. November 2023, pp. 65–73, 2010, doi: https://doi.org/10.1017/cbo9780511623653.010.

[2] I. G. A. W. Wardhana, F. Maulana, and N. H. Sarmin, “On the uniqueness of almost prime submodules within cyclic uniserial modules,” *Journal of Discrete Mathematical Sciences and Cryptography*, vol. 28, no. 1, pp. 239–247, Feb. 2025, doi: https://doi.org/10.47974/JDMSC-2194.

[3] I. G. A. W. Wardhana and F. Maulana, “Sebuah Karakteristik dari Modul Uniserial dan Gelanggang Uniserial,” vol. 7, pp. 9–17, 2021, https://doi.org/10.52166/ujmc.v7i2.2674.

[4] M. F. Atiyah and I. G. Macdonald, “Introduction to Commutative Algebra,” *Introduction to Commutative Algebra*, pp. 1–128, 2018, doi: https://doi.org/10.1201/9780429493621.

[5] A. Banerjee, “Noetherian Rings—Dimension and Chain Conditions,” *American Journal of Undergraduate Research*, vol. 4, no. 3, pp. 27–34, 2005, doi: https://doi.org/10.33697/ajur.2005.023.

[6] S. Prakash and A. K. Chaturvedi, “On some classes of modules related to chain conditions,” *Palestine Journal of Mathematics*, vol. 11, no. Special Issue II, pp. 108–112, 2022, https://pjm.ppu.edu/sites/default/files/papers/PJM_Speciall_Issue_II_March_2022_108_to_112.pdf.

[7] T. Singh, A. U. Ansari, and S. Datt Kumar, “Surveys in Mathematics and its Applications S-NOETHERIAN RINGS, MODULES AND THEIR GENERALIZATIONS,” vol. 18, pp. 163–182, 2023, https://www.utgjiu.ro/math/sma/v18/a18_13.html.

[8] E. Matlis, “Injective Modules Over Noetherian Rings Injective Modules Over Noetherian Rings,” vol. 8, no. 3, 1958.

[9] J. Cuadra, C. Năstăsescu, and F. Van Oystaeyen, “Graded almost noetherian rings and applications to coalgebras,” *Journal of Algebra*, vol. 256, no. 1, pp. 97–110, 2002, doi: https://doi.org/10.1016/S0021-8693(02)00099-6.

[10] S. MARTASARI, I. MADE ARNAWA, and N. NOLIZA BAKAR, “Sifat-Sifat Modul Noetherian,” *Jurnal Matematika UNAND*, vol. 9, no. 2, p. 121, 2020, doi: https://doi.org/10.25077/jmu.9.2.121-129.2020.

[11] A. Wayne, “Noetherian modules and noetherian injective rings,” *Tohoku Mathematical Journal*, vol. 17, no. 2, pp. 130–138, 1965, doi: https://doi.org/10.2748/tmj/1178243578.

[12] A. Anebri, N. Mahdou, and Ü. Tekir, “Commutative rings and modules that are r-noetherian,” *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, vol. 58, no. 5, pp. 1221–1233, 2021, doi: https://doi.org/10.4134/BKMS.b200881.

[13] A. Faisol, B. Surodjo, and S. Wahyuni, “The Relation between Almost Noetherian Module, Almost Finitely Generated Module and T-Noetherian Module,” *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 1306, no. 1, 2019, doi: https://doi.org/10.1088/1742-6596/1306/1/012001.

[14] Q. A. Az-zakiyah and I. Nisfulaila, “Sifat Rantai Naik pada Modul r-Noetherian Serta Keterkaitan Modul r- Noetherian dengan Modul Noetherian dan Modul Hampir Noetherian,” vol. 3, no. September 2023, pp. 289–295, 2024, http://etheses.uin-malang.ac.id/65093/.