



Sejarah dan Definisi Klasik Fungsi Konveks (*Classical Definition and Historical Background of Convex Functions*)

Syamsuddin Mas'ud^{1*}

1. Matematika, Universitas Negeri Makassar, Indonesia. Email: syamsuddinm@unm.ac.id

ABSTRACT

The concept of convexity is a fundamental pillar in optimization theory and inequality analysis. This article aims to review the history and classical definition of convex functions through a literature-based approach. The literature reviewed includes works by Jensen [1], Rockafellar [2], Boyd & Vandenberghe [3], and Niculescu & Persson [4]. The analysis highlights the connection between the geometric definition of convex functions and Jensen's inequality, which demonstrates the consistency of inequality structures in both deterministic and probabilistic contexts. This study emphasizes that Jensen's inequality not only extends the concept of convex functions in probability theory but also strengthens the understanding of its geometric definition in classical analysis. This article is intended to serve as an introduction for students and researchers wishing to comprehend the foundational structure of convexity in modern mathematical theory.

Keywords: convexity; Jensen's inequality; optimization theory

ABSTRAK

Konsep konveksitas merupakan pilar penting dalam teori optimisasi dan analisis ketaksamaan. Artikel ini bertujuan meninjau sejarah dan definisi klasik fungsi konveks melalui pendekatan kajian pustaka. Literatur yang dikaji meliputi karya Jensen [1], Rockafellar [2], Boyd & Vandenberghe [3], serta Niculescu & Persson [4]. Analisis menyoroti keterkaitan antara definisi geometris fungsi konveks dan ketaksamaan Jensen, yang menunjukkan konsistensi struktur ketaksamaan baik dalam konteks deterministik maupun probabilistik. Studi ini menegaskan bahwa ketaksamaan Jensen tidak hanya memperluas konsep fungsi konveks dalam teori probabilitas, tetapi juga memperkuat pemahaman definisi geometrisnya dalam analisis klasik. Artikel ini diharapkan dapat menjadi pengantar bagi mahasiswa dan peneliti yang ingin memahami struktur dasar kekonveksan dalam teori matematika modern.

Keywords: konveksitas; ketaksamaan Jensen; teori optimisasi

Diterima: 15-04-2025;

doi: <https://doi.org/10.29303/semeton.v2i1.282>

Disetujui: 24-04-2025;

1. Pendahuluan

Konsep kekonveksan telah memainkan peranan fundamental dalam perkembangan ilmu matematika, tidak hanya dalam aspek teori murni, tetapi juga dalam berbagai aplikasi di bidang ekonomi, fisika, optimisasi, statistik, dan ilmu komputer [3], [5]. Keunggulan utama dari kekonveksan terletak pada kemampuannya memodelkan fenomena yang stabil, seimbang, dan

* Corresponding author

e-mail: syamsuddinm@unm.ac.id



efisien, sehingga menjadikannya sebagai salah satu komponen inti dalam kerangka teori optimisasi modern [6], [7]. Dalam praktiknya, banyak permasalahan optimisasi nonlinier yang tampak kompleks dan sulit ditangani ternyata dapat disederhanakan dan diselesaikan secara efektif apabila fungsi objektif maupun kendala yang terlibat dalam perumusan masalah tersebut bersifat konveks.

Secara intuitif, konsep kekonveksan berakar dari pemahaman geometris sederhana yang telah dikenali sejak zaman Yunani Kuno, khususnya dalam studi mengenai bentuk-bentuk geometri datar dan padat yang stabil [3], [8], [9]. Bentuk konveks secara umum diasosiasikan dengan objek-objek yang tidak memiliki lekukan ke dalam, sebuah sifat yang di kemudian hari diterjemahkan ke dalam bahasa matematika formal melalui ketaksamaan dan representasi analitik [3]. Seiring perkembangan zaman, kebutuhan akan formulasi yang lebih ketat dan general terhadap konsep ini pun muncul, terutama ketika matematikawan mulai mengkaji persoalan yang melibatkan ruang berdimensi tinggi dan fungsi-fungsi yang tidak selalu dapat divisualisasikan secara geometris [10], [11].

Perkembangan signifikan dalam kajian kekonveksan mulai tampak jelas pada awal abad ke-20, ditandai dengan diperkenalkannya ketaksamaan Jensen oleh Johan Jensen [1]. Ketaksamaan ini tidak hanya memperluas pemahaman tentang sifat-sifat fungsi konveks, tetapi juga membuka jalan bagi definisi formal fungsi konveks seperti yang banyak digunakan dalam literatur modern. Ketaksamaan Jensen menjadi titik temu antara aspek geometris dan aspek analitik dari kekonveksan, yang kemudian melahirkan berbagai metode pembuktian dalam teori ketaksamaan dan teori optimisasi.

Kontribusi monumental lainnya datang dari Rockafellar melalui karyanya *Convex Analysis*, yang tidak hanya merangkum tetapi juga memperluas teori kekonveksan ke dalam kerangka ruang vektor topologi dan ruang Banach [2]. Pendekatan ini membuka cakrawala baru dalam pengembangan metode-metode analitik untuk menangani berbagai permasalahan matematis nonlinier, serta mendorong munculnya aplikasi yang lebih luas di berbagai cabang ilmu, termasuk ekonomi matematis, pengendalian optimal, dan perhitungan numerik.

Di era modern, kekonveksan semakin menonjol dalam pengembangan algoritma optimisasi, khususnya sejak diterbitkannya buku *Convex Optimization* oleh Boyd dan Vandenberghe (2004). Buku tersebut telah menjadi salah satu rujukan utama dalam menghubungkan teori kekonveksan dengan aplikasi praktis di bidang rekayasa, riset operasional, dan *machine learning*. Formulasi masalah dalam bentuk konveks tidak hanya memudahkan proses analisis, tetapi juga menjamin keberadaan solusi global yang stabil dan efisien secara komputasional [5].

Dalam perkembangan teoritisnya, kekonveksan didefinisikan melalui beberapa pendekatan yang saling melengkapi. Di antaranya adalah pendekatan geometris yang menekankan pada sifat segmen garis penghubung dua titik dalam domain fungsi, pendekatan analitik melalui ketaksamaan Jensen, pendekatan berbasis epigraf yang meninjau himpunan titik-titik di atas grafik fungsi, dan pendekatan melalui subgradien yang menjadi dasar teori dualitas dalam optimisasi non-diferensiabel [3]. Setiap pendekatan memiliki keunggulan tersendiri dalam konteks aplikasinya.

Meskipun demikian, definisi klasik dari fungsi konveks tetap memegang peran penting, tidak hanya sebagai pintu masuk bagi pemahaman konsep ini, tetapi juga sebagai fondasi kokoh dalam pengembangan teori lanjutan di berbagai bidang ilmu. Dari perspektif historis hingga aplikatif, teori kekonveksan merepresentasikan lebih dari sekadar model matematis, melainkan juga filosofi kestabilan dan efisiensi yang esensial dalam merancang solusi atas permasalahan di dunia nyata. Oleh karena itu, penguasaan yang komprehensif atas konsep-konsep dasar kekonveksan menjadi kebutuhan mutlak dalam studi dan praktik optimisasi modern.

Oleh karena itu, artikel ini disusun dengan tujuan untuk menyajikan sebuah tinjauan ringkas namun sistematis mengenai sejarah perkembangan konsep kekonveksan dan definisi klasik fungsi konveks, termasuk penjelasan tentang interpretasi geometris serta peran penting ketaksamaan Jensen dalam membentuk landasan teoritisnya. Melalui pendekatan historis dan konseptual, diharapkan artikel ini dapat menjadi referensi awal yang memadai bagi peneliti, mahasiswa, maupun praktisi yang ingin memahami akar dan struktur fundamental kekonveksan dalam teori matematika modern.

2. Metode

Penelitian ini menggunakan pendekatan studi pustaka (*literature review*) yang bertujuan mengumpulkan, mengklasifikasikan, dan menganalisis berbagai definisi klasik fungsi konveks yang berkembang sejak awal abad ke-20. Penelusuran dilakukan terhadap sumber-sumber literatur ilmiah yang tersedia dan dapat diakses bebas.

Data utama diperoleh dari:

- Buku *Convex Analysis* oleh Rockafellar (1970) yang diakses melalui Internet Archive.
- Artikel Johan Jensen (1906) yang tersedia dalam domain publik melalui *Acta Mathematica*.
- Buku *Convex Optimization* oleh Boyd dan Vandenberghe (2004), tersedia dalam situs resmi Universitas Stanford.
- Buku *Convex Functions and Their Applications* oleh Niculescu dan Persson (2006), yang tersedia dalam akses terbuka oleh Springer.

Kriteria seleksi referensi didasarkan pada: (1) kontribusi signifikan terhadap definisi atau sejarah kekonveksan; (2) aksesibilitas publik secara daring; dan (3) validitas akademik sumber. Analisis dilakukan dengan meninjau ulang isi dokumen, mengidentifikasi bagian-bagian yang relevan dengan definisi klasik fungsi konveks, dan menyajikannya secara sistematis untuk keperluan dokumentasi dan studi konseptual dalam riset lanjutan.

3. Hasil dan Pembahasan

3.1. Sejarah Singkat Kekonveksan

Berdasarkan kamus besar bahasa Indonesia (KBBI), konveks merupakan kata yang berarti cembung dan merupakan kata serapan dari bahasa asing, terutama dari bahasa Inggris dan bahasa Latin. Dalam bahasa Inggris, konveks berasal dari kata *convex* dan dalam bahasa Latin berasal dari kata *convexus*.

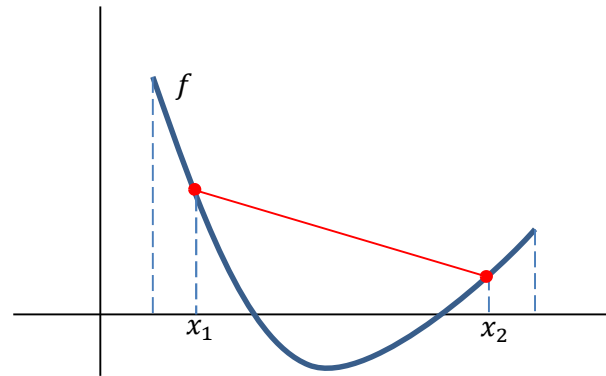
Konsep kekonveksan memiliki akar yang kuat dalam pemahaman geometris klasik yang telah diperhatikan sejak era Yunani Kuno. Para matematikawan seperti Euclid dalam *Elements* dan Archimedes dalam *On the Sphere and Cylinder* telah mengamati bentuk-bentuk geometris, seperti lingkaran dan bola, yang secara intuitif mencerminkan ciri khas kekonveksan, yaitu bahwa garis lurus yang menghubungkan dua titik di dalam bangun tersebut akan sepenuhnya berada dalam bangun yang sama [12]. Meskipun pada masa itu definisi formal belum dirumuskan, pengamatan ini menunjukkan bahwa ide dasar kekonveksan telah menjadi bagian dari intuisi geometris sejak awal perkembangan matematika. Baru pada abad ke-20, konsep kekonveksan diformalkan secara lebih sistematis dalam analisis matematika, dimulai dari ketaksamaan yang diperkenalkan oleh Jensen dalam karyanya yang terkenal pada tahun 1906 [1]. Ketaksamaan ini tidak hanya memperluas konsep konveksitas dalam konteks nilai harapan peubah acak, tetapi juga memperjelas hubungan struktural antara definisi geometris fungsi konveks yang telah lebih dahulu dikenal dalam analisis deterministik. Teori fungsi konveks kemudian berkembang menjadi teori fungsi konveks modern dan diuraikan secara mendalam dalam karya Rockafellar [2]. Hal ini menegaskan bahwa kekonveksan merupakan konsep yang tidak hanya historis, tetapi juga esensial dalam banyak cabang matematika modern, mulai dari teori ketaksamaan, optimisasi, hingga analisis variational.

3.2. Definisi Geometris Fungsi Konveks dan Ketaksamaan Jensen

Konsep fungsi konveks dalam analisis matematika klasik berasal dari pengamatan geometris yang intuitif. Suatu fungsi real $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ dikatakan konveks pada $I \subseteq \mathbb{R}$ jika untuk t dengan $0 \leq t \leq 1$ dan sebarang $x_1, x_2 \in I$, berlaku

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2).$$

Ketaksamaan ini menunjukkan bahwa titik-titik pada ruas garis (lurus) penghubung titik $(x_1, f(x_1))$ dan titik $(x_2, f(x_2))$ akan selalu terletak di atas grafik fungsi f [2], [3], [13].



Gambar 1. Fungsi f (kurva) dan salah satu ruas garis yang menghubungkan 2 titik pada kurva f (garis lurus) yang memberikan interpretasi geometris fungsi konveks (fungsi f)

Perkembangan formal lebih lanjut terjadi pada tahun 1906, saat Johan Ludwig Jensen dalam tulisannya di *Acta Mathematica* memperkenalkan ketaksamaan dalam konteks nilai harapan, yang berbunyi sebagai berikut:

$$f(E[X]) \leq E[f(X)],$$

dimana X adalah peubah acak, $E[X]$ adalah nilai harapannya, dan f adalah fungsi konveks. Ketaksamaan ini menyatakan bahwa penerapan fungsi konveks pada nilai harapan suatu peubah acak tidak akan menghasilkan nilai yang lebih besar dibandingkan dengan nilai harapan dari fungsi tersebut yang diterapkan pada peubah acak [1].

Meskipun ketaksamaan Jensen pertama kali dikembangkan dalam konteks teori probabilitas, struktur ketaksamaannya identik dengan definisi geometris fungsi konveks pada kasus deterministik. Sebagai contoh, jika X adalah peubah acak diskrit yang hanya bernilai x_1 dan x_2 dengan probabilitas masing-masing $1-t$ dan t , maka ketaksamaan Jensen bertransformasi menjadi:

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2),$$

yang merupakan bentuk klasik dari definisi geometris konveksitas. Dengan demikian, ketaksamaan Jensen tidak hanya memperluas konsep fungsi konveks dalam ranah probabilitas, tetapi juga menegaskan kembali struktur geometris yang telah lama dikenal dalam analisis murni [4].

Misalkan fungsi $f(x) = x^2$ yang merupakan fungsi konveks pada $\mathbb{R}$. Dari fungsi ini, akan diuji konveksitasnya dalam konteks geometris (deterministik) dan probabilistik (ketaksamaan Jensen). Misalkan titik pengujian pada domain yaitu $x_1 = 1$ dan $x_2 = 3$. Secara geometris, untuk sebarang $t \in [0,1]$, diperoleh titik-titik di sepanjang ruas garis yang menghubungkan x_1 dan x_2 yang berbentuk,

$$x_t = (1-t)x_1 + tx_2 = 1 + 2t,$$

sehingga diperoleh

$$f(x_t) = (1 + 2t)^2.$$

Dilain pihak,

$$(1-t)f(x_1) + tf(x_2) = 1 + 8t.$$

Akibatnya,

$$f((1-t)x_1 + tx_2) = (1 + 2t)^2 \leq (1 + 8t) = (1-t)f(x_1) + tf(x_2).$$

Selanjutnya, akan digunakan pendekatan dengan ketaksamaan Jensen. Menurut konteks teori probabilitas, ketaksamaan Jensen menyatakan bahwa untuk peubah acak X yang mengambil nilai di $\mathbb{R}$ dan fungsi konveks f , berlaku:

$$f(E[X]) \leq E[f(X)].$$

Misalkan X sebagai peubah acak diskrit yang memiliki nilai yaitu $x_1 = 1$ dan $x_2 = 3$. Misalkan pula distribusi probabilitasnya adalah

$$P(X = x_1) = 1 - t \text{ dan } P(X = x_2) = t.$$

Diperoleh nilai harapan X adalah

$$E[X] = (1 - t)x_1 + tx_2 = 1 + 2t.$$

Karena itu, fungsi pada nilai harapan adalah

$$f(E[X]) = (1 + 2t)^2.$$

Sedangkan nilai harapan dari $f(X)$ adalah

$$E[f(X)] = (1 - t)f(x_1) + tf(x_2) = 1 + 8t.$$

Contoh di atas menunjukkan bahwa meskipun definisi geometris fungsi konveks dan ketaksamaan Jensen dikembangkan dalam konteks yang berbeda, deterministik dalam geometri analitik dan probabilistik dalam teori nilai harapan, kedua pendekatan tersebut menghasilkan struktur ketaksamaan yang ekuivalen ketika diterapkan pada peubah acak diskrit sederhana. Dengan kata lain, ketaksamaan Jensen dapat dipandang sebagai perluasan probabilistik dari definisi geometris fungsi konveks yang telah lebih dahulu dikenal dalam analisis matematis klasik, sekaligus menyediakan justifikasi aljabar bagi intuisi visual yang melekat pada konsep kekonveksan.

4. Kesimpulan

Konsep fungsi konveks berakar dari intuisi geometris yang telah dikenal sejak zaman Yunani Kuno dan mengalami perkembangan formal yang lebih sistematis melalui ketaksamaan Jensen pada awal abad ke-20. Kajian ini menunjukkan bahwa definisi geometris fungsi konveks dan ketaksamaan Jensen, meskipun lahir dari pendekatan yang berbeda, ternyata membentuk struktur ketaksamaan yang setara. Hubungan ini menegaskan peran penting definisi klasik dalam analisis matematika, terutama sebagai pijakan bagi pengembangan teori dan aplikasi di berbagai bidang seperti optimisasi, probabilitas, dan ketaksamaan. Memahami dasar-dasar definisi ini dengan baik menjadi langkah awal yang penting sebelum melangkah ke kajian yang lebih dalam dalam studi matematika modern.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] J. L. W. V. Jensen, "Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes," *Acta Mathematica*, vol. 30, hlm. 175–193, 1906, doi: 10.1007/BF02418571.
- [2] R. T. Rockafellar, *Convex Analysis*. Princeton, New Jersey, Amerika Serikat: Princeton University Press, 1970.
- [3] S. P. Boyd dan L. Vandenberghe, *Convex optimization*. Cambridge, UK; New York: Cambridge University Press, 2004.
- [4] C. P. Niculescu dan L.-E. Persson, *Convex Functions and Their Applications: A Contemporary Approach*. dalam CMS Books in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 2006.
- [5] R. Correa, A. Hantoute, dan M. A. López, *Fundamentals of Convex Analysis and Optimization: A Supremum Function Approach*. dalam Springer Series in Operations Research and Financial Engineering. Cham: Springer International Publishing, 2023. doi: 10.1007/978-3-031-29551-5.
- [6] A. Ben-Tal dan A. Nemirovski, *Lectures on Modern Convex Optimization: Analysis, Algorithms, and Engineering Applications*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2001. doi: 10.1137/1.9780898718829.
- [7] P. Dvurechensky, M. Staudigl, dan S. Shtern, "First-Order Methods for Convex Optimization," 6 Januari 2021, *arXiv*: arXiv:2101.00935. doi: 10.48550/arXiv.2101.00935.
- [8] J. Gow, *A short history of Greek mathematics*, [Nachdruck der Ausg.] Cambridge 1884. dalam Cambridge library collection Classics. Cambridge: Cambridge University Press, 2010.
- [9] A. Rahmah, "KEKONVEKSAN SUATU FUNGSI PADA RUANG METRIK KONVEKS," vol. 7, 2019.
- [10] M. Ahookhosh dan A. Neumaier, "High-dimensional convex optimization via optimal affine subgradient algorithms".

- [11] P. M. Gruber, *Convex and discrete geometry*. dalam Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, no. v. 336. Berlin ; New York: Springer, 2007.
- [12] T. L. Heath, *A History of Greek Mathematics (Volume 1 & 2)*. Oxford, Inggris: Clarendon Press, 1921.
- [13] R. G. Bartle, *Introduction to Real Analysis, Fourth Edition*, Fourth. United States of America: John Wiley & Sons, Inc., 2011.