



Harary Index of the Coprime Graph and Power Graph of the Integer Modulo Group and the Dihedral Group

Luzianawati¹, Rio Satriyantara^{2*}

1. Program Studi Matematika, Universitas Mataram, Indonesia.

ABSTRACT

This study investigates the Harary Index of coprime graphs and power graphs constructed from the integer modulo group and the dihedral group. A coprime graph is defined as a graph whose vertices represent the elements of a group, where two vertices are adjacent if the orders of the corresponding elements are relatively prime. Meanwhile, a power graph is a graph in which two elements are connected whenever one is a power of the other within the group. The Harary Index is employed to measure the topological characteristics of the graph based on the distances between its vertices. The results show that the structure of the generated graphs allows for an explicit computation of the Harary Index, particularly for groups whose orders are prime powers. graphs facilitate the calculation of the Harary Index, especially for groups with prime power order.

Keywords: Harary Index; Coprime Graph; Power Graph; Modulo Group; Dihedral Group.

ABSTRAK

Penelitian ini mengkaji Indeks Harary dari graf koprima dan graf pangkat pada grup bilangan bulat modulo serta grup dihedral. Graf koprima merupakan graf yang simpul-simpulnya mewakili elemen grup dan dua simpul dihubungkan jika orde kedua elemen tersebut relatif prima. Sementara itu, graf pangkat adalah graf yang dua elemennya terhubung jika salah satunya merupakan pangkat dari elemen lainnya dalam grup. Indeks Harary digunakan untuk mengukur karakteristik graf berdasarkan jarak antar simpul. Hasil menunjukkan bahwa struktur graf yang terbentuk memungkinkan perhitungan Indeks Harary secara eksplisit, khususnya pada grup yang memiliki orde pangkat prima.

Keywords: Indeks Harary; Graf Koprima; Graf Pangkat; Grup Modulo; Grup Dihedral.

Diterima: 28-05-2025;

Disetujui: 17-10-2025;

Doi: <https://doi.org/10.29303/semeton.v2i2.307>

1. Pendahuluan

Salah satu cabang matematika yang mempelajari struktur-struktur aljabar dan sistem matematika seperti grup adalah aljabar abstrak, teori grup ini menjadi topik penting dalam aljabar abstrak. Grup didefinisikan sebagai himpunan yang tak kosong G yang dilengkapi dengan operasi biner $*$ yang memenuhi sifat asosiatif, dan mempunyai elemen identitas, selain itu juga memiliki invers [1]. Contoh grup yang umum dikenal termasuk grup bilangan bulat modulo dan grup dihedral.

Teori graf adalah salah satu teori yang dapat diterapkan untuk menyelesaikan berbagai masalah dalam kehidupan sehari-hari, seperti dalam bidang kimia, permainan, transportasi, dan penjualan [2]. Selain itu, dalam konteks ilmu matematika murni, graf juga sering digunakan

* Corresponding author

e-mail: riosatriyantara@staff.unram.ac.id



sebagai alat representasi untuk menggambarkan struktur suatu grup [3]. Oleh karena itu, teori graf dan teori grup kerap sering dikombinasikan [4].

Jenis-jenis graf yang sering digunakan dalam matematika antara lain adalah graf invers, graf identitas, graf koprima, graf non-koprima, graf commuting, graf non-commuting, dan graf-graf lainnya [5]. Banyak penelitian telah dilakukan tentang representasi graf dari grup, di antaranya adalah penelitian [6] yang membahas graf koprima yang merepresentasikan grup bilangan bulat modulo, penelitian [4] yang membahas Indeks Harary dari graf pangkat pada grup bilangan bulat modulo, serta penelitian [7] yang membahas tentang graf koprima pada grup dihedral.

Aplikasi lebih lanjut mengenai teori graf dalam matematika yaitu menentukan Indeks Topologi. Indeks Topologi merupakan metrik yang digunakan dalam mengukur karakteristik graf, seperti jarak, kerapatan, dan lainnya [8]. Adapun Indeks Topologi yang biasa kita kenal adalah Indeks Wiener, Indeks Zagreb, Indeks Randic, Indeks Szeged, Indeks Sombor, dan Indeks Harary [9]. Indeks Harary adalah total jarak setiap pasang simpul di titik u dan v dalam suatu graf [10]. Oleh karena itu, penelitian ini lebih berfokus pada pembahasan nilai Indeks Harary pada graf koprima dan graf pangkat yang berasal dari grup bilangan bulat modulo serta grup dihedral.

2. Metode

Studi ini dilakukan dengan pendekatan studi pustaka, yang bertujuan untuk menganalisis karakteristik Indeks Harary pada graf koprima dan graf pangkat yang berasal dari grup bilangan bulat modulo serta grup dihedral. Tahapan penelitian dimulai dengan mengkaji literatur terkait teori grup, graf koprima, graf pangkat, dan Indeks Harary. Selanjutnya, ditentukan struktur dan orde elemen dari masing-masing grup untuk membentuk graf koprima dan graf pangkat. Indeks ini kemudian dihitung berdasarkan jarak antar simpul dalam graf yang telah dibangun. Dari hasil perhitungan tersebut, disusun konjektur dan dilakukan pembuktian untuk memperoleh bentuk umum indeks Harary pada graf-graf yang dikaji. Penelitian ini tutup dengan penarikan kesimpulan berdasarkan hasil analisis yang telah diperoleh.

3. Hasil dan Pembahasan

Pembuatan artikeli ini berfokus pada indeks Harary yang diterapkan tiga jenis graf, yaitu graf koprima dari grup bilangan bulat $\mathbb{Z}_n$, graf pangkat dari grup bilangan bulat $\mathbb{Z}_n$, dan graf koprima dari grup dihedral $\Gamma_{D_{2n}}$.

Graf

Objek dasar dalam teori graf yang digunakan untuk memodelkan relasi antar objek disebut graf. Dalam konteks ini, simpul mewakili objek, dan sisi mewakili hubungan antar objek tersebut. Graf dapat digunakan dalam berbagai aplikasi, dari ilmu komputer hingga ilmu sosial. Untuk lebih jelasnya, berikut adalah definisi formal dari graf:

Definisi 3.1 [11] Graf terdiri dari dua pasangan terurut, yakni V dan E , di mana V adalah himpunan tak kosong yang elemennya disebut simpul dan E adalah himpunan pasangan elemen dari V yang disebut sisi. Graf G dinotasikan dengan $G = (V, E)$, dan sisi yang menghubungkan simpul u dan v ditulis dengan uv . Himpunan simpul dan sisi masing-masing dinotasikan dengan $V(G)$ dan $E(G)$.

Jarak Antar Simpul

Dalam teori graf, salah satu konsep penting utama adalah jarak antar simpul yang merupakan ukuran seberapa "jauh" dua simpul dalam suatu graf. Konsep ini sangat penting terutama ketika kita menghitung indeks-indeks topologi seperti Indeks Harary. Berikut ini adalah definisi formal dari jarak antara dua simpul dalam graf:

Definisi 3.2 [12] Misalkan G adalah graf dengan $u, v \in V(G)$. Panjang minimum dari titik u ke titik v disebut jarak antara kedua tersebut pada graf G , yang dilambangkan dengan $d_G(u, v)$ atau

$d(u, v)$. Jarak ini didefinisikan sebagai panjang lintasan terpendek yang menghubungkan titik u dan v .

Indeks Harary

Dalam teori graf, salah satu cara untuk menilai karakteristik struktur graf adalah dengan menggunakan Indeks Topologi. Indeks Harary termasuk dalam kategori ini dan berguna untuk mengukur keterhubungan graf berdasarkan jarak antar simpul. Semakin dekat dua simpul dalam graf, semakin besar kontribusinya terhadap indeks ini. Untuk memahaminya lebih lanjut, berikut adalah definisinya

Definisi 3.3 [13] Diberikan sebuah graf terhubung G . Nilai Indeks Harary dari graf tersebut dilambangkan dengan $H(G)$, didefinisikan sebagai berikut

$$H(G) = \sum_{u,v \in V(G)} \frac{1}{d(u, v)}.$$

Grup Bilangan Bulat Modulo

Bilangan bulat modulo adalah struktur aljabar yang sering digunakan untuk menyederhanakan operasi bilangan dalam ruang sisa. Ketika kita mempertimbangkan operasi penjumlahan dalam sistem ini, kita mendapatkan struktur yang memenuhi sifat-sifat grup. Grup ini sangat penting dalam berbagai cabang matematika, termasuk kriptografi dan teori bilangan. Berikut adalah definisi formal dari grup bilangan bulat modulo:

Definisi 3.4 [4] Grup $\mathbb{Z}_n$ merupakan grup yang beranggotakan bilangan bulat non-negatif dengan operasi penjumlahan modulo n . Grup ini dilambangkan dengan $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$, dan operasinya yang diterapkan adalah $+\text{mod}(n)$.

Grup Dihedral

Grup dihedral adalah salah satu contoh grup yang sering dibahas dalam teori grup karena berkaitan langsung dengan simetri. Grup ini menggambarkan sekumpulan rotasi dan refleksi yang menjaga bentuk sebuah poligon beraturan tetap sama. Dengan kata lain, grup dihedral memuat semua transformasi simetri dari poligon beraturan, baik berupa perputaran maupun pencerminan. Untuk lebih jelasnya, berikut definisi formal mengenai grup dihedral.

Definisi 3.5 [15] Misalkan G adalah sebuah grup. Grup G (yang disebut grup dihedral dengan orde $2n$, dengan $n \geq 3$) adalah grup yang dibentuk oleh dua elemen a dan b sehingga

$$G = D_2 = \langle a, b | a^n = e, b^2 = e, bab^{-1} = a^{-1} \rangle.$$

Elemen b memiliki orde 2 dan disebut sebagai unsur refleksi, dan elemen a dengan orde $n \geq 3$ disebut unsur rotasi. Dengan demikian, orde dari grup dihedral D_{2n} jelas bernilai $2n$.

Graf Pangkat

Dalam sebuah grup, terdapat relasi antar elemen berdasarkan hasil perpangkatan. Hubungan ini dapat digambarkan dalam bentuk graf yang dikenal sebagai graf pangkat. Graf ini menghubungkan elemen-elemen yang saling berkaitan sebagai hasil dari operasi pangkat. Konsep ini sangat berguna untuk memahami struktur internal dari grup. Berikut ini adalah definisinya

Definisi 3.6 [16] Misalkan graf G adalah suatu grup. Graf pangkat dari G merupakan graf sederhana yang simpul-simpulnya terdiri dari elemen-elemen grup G , dan dua simpul yang berbeda $a, b \in G$ dikatakan bertetangga jika terdapat $x, y \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $a = b^x$ atau $b = a^y$. Graf pangkat dari grup G dinyatakan dengan notasi Γ_G .

Graf Koprime

Dalam struktur grup, kita juga dapat mempertimbangkan hubungan antara elemen-elemen berdasarkan sifat keterkoprimaan. Ketika dua elemen tidak memiliki faktor persekutuan selain 1, kita mengatakan bahwa mereka koprima. Relasi ini membentuk dasar dari graf koprima, yang secara khusus digunakan untuk menggambarkan keterkaitan berdasarkan koprimalitas. Definisinya dijelaskan sebagai berikut.

Definisi 3.7 [17] Misalkan G adalah grup hingga. Γ_G merupakan graf yang memiliki simpul-simpul yang terdiri dari semua elemen dalam G . Sebarang simpul yang berbeda, x dan y dalam Γ_G dapat dikatakan saling bertetangga jika $(|x|, |y|) = 1$.

Sejumlah studi sebelumnya telah menghasilkan karakterisasi dari graf-graf yang dibentuk berdasarkan $\mathbb{Z}_n$ dan D_{2n} . Beberapa hasil utama tersebut dirangkum dalam teorema-teorema berikut, yang akan digunakan dalam perhitungan Indeks Harary.

Berdasarkan definisi pembahasan sebelumnya, ada beberapa teorema yang bisa dijadikan sebagai acuan untuk memahami struktur graf dan menghitung indeks Harary. Teorema-teorema berikut menyajikan sifat-sifat penting dalam graf yang dibentuk oleh grup $\mathbb{Z}_n$ dan D_{2n} .

Teorema 3.1 [18]. Misalkan terdapat sebuah grup bilangan bulat modulo n , yaitu $\mathbb{Z}_n$ dengan operasi $+_{\text{mod}(n)}$. Jika $n = p^k$ untuk semua $k \in \mathbb{N}$ dan p adalah bilangan prima. maka $\mathbb{Z}_n (\Gamma_{\mathbb{Z}_n})$ merupakan graf lengkap K_n

Teorema 3.2 Jika $n = p^k$ dengan $k \in \mathbb{N}$, maka $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$ membentuk sebuah graf bipartite lengkap.

Bukti. Lihat [6]

Teorema 3.3 [5] Misalkan $n = p^k$ untuk suatu $k \in \mathbb{N}$ dan p adalah bilangan prima dengan $p \neq 2$. Maka $\Gamma_{D_{2n}}$ merupakan graf tripartite lengkap.

$H(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})$ diberikan pada teorema berikut untuk kasus di mana n adalah perpangkatan prima.

Graf koprima dari grup bilangan bulat modulo

Pada bagian ini akan dibahas mengenai hasil yang berkaitan dengan struktur graf yang dikaji secara lebih dalam. Pembahasan difokuskan pada pola keterhubungan antar simpul yang muncul, serta bagaimana sifat-sifat aljabar dari grup yang digunakan tercermin dalam representasi grafisnya. Salah satu temuan penting dari penelitian ini kemudian ditunjukkan dalam teorema berikut.

Teorema 3.4 [13] Apabila $n = p^k$ untuk suatu $k \in \mathbb{N}$, maka $H(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})$ ditentukan oleh

$$H(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) = (n - 1)^2.$$

Bukti. Menurut Teorema 3.2, graf koprima dari grup bilangan bulat modulo $\mathbb{Z}_n$ adalah graf bipartite lengkap, dimana jarak $d(e, v) = 1$ untuk setiap simpul v . Sementara itu, untuk setiap pasang u, v yang keduanya bukan merupakan simpul identitas, diperoleh jarak adalah $d(u, v) = 2$. Oleh karena itu, pasangan-pasangan simpul yang mungkin terbentuk antara simpul identitas dan simpul lainnya terdiri atas semua pasangan (e, v) , sedangkan pasangan di antara simpul non identitas membentuk pasangan (u, v) dengan jarak 2.

$$C_1^{n-1} = \frac{(n-1)!}{((n-1)-1)!} = n-1.$$

Artinya, jumlah pasangan simpul yang melibatkan elemen identitas adalah sebanyak $n - 1$. Sedangkan untuk pasangan yang tidak termasuk elemen identitas, kita hitung banyaknya kombinasi pasangan dua-dua dari simpul non identitas

$$c_2^{n-1} = \frac{(n-1)!}{((n-2)-1)! 2!}$$

Sedangkan diperoleh hasil:

$$c_2^{n-1} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Jumlah pasangan simpul non identitas adalah $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$. Selanjutnya, untuk menghitung indeks Harary digunakan rumus:

$$H(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) = \sum_{u,v \in \mathbb{Z}_n} \frac{1}{d(u,v)}$$

Karena terdapat dua jenis pasangan (pasangan dengan jarak 1 dan pasangan dengan jarak 2), maka rumus dapat dituliskan:

$$\begin{aligned} H(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) &= \sum_{v \in \mathbb{Z}_n \setminus \{e\}} \frac{1}{d(u,v)} + \sum_{u,v \in \mathbb{Z}_n \setminus \{e\}} \frac{1}{d(u,v)} \\ &= (n-1) \times 1 + \frac{(n-1)(n-2)}{2} \times 2 \\ &= (n-1)^2 \end{aligned}$$

Artinya, hasil perhitungan pada struktur yang dikaji memberikan nilai sama dengan $(n-1)^2$. Dengan kata lain, pola keterhubungan yang terbentuk dapat diringkas secara sederhana melalui rumus tersebut, sehingga memudahkan dalam memahami karakteristik graf pada kondisi ini.

Indeks Harary dari graf pangkat bilangan bulat modulo n

Selanjutnya, pembahasan diarahkan pada salah satu struktur yang dikonstruksi dari himpunan bilangan dengan operasi tertentu. Pada bagian ini, akan ditunjukkan sebuah hasil yang bersifat umum dan dapat digunakan sebagai acuan dalam menentukan pola keterhubungan yang muncul. Rumus yang diperoleh tidak hanya memberikan gambaran mengenai hubungan antar elemen, tetapi juga memperlihatkan keteraturan yang terjadi pada struktur tersebut. Dengan demikian, hasil ini dapat menjadi dasar untuk analisis yang lebih lanjut pada kasus-kasus dengan ukuran yang lebih besar.

Teorema 3.5 [4] Diberikan $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$ merupakan graf pangkat dari bilangan bulat modulo n , dimana $n = p^k$ untuk semua $k \in \mathbb{N}$ dan p yang merupakan bilangan prima. Maka, Indeks Harary dari $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$ dinyatakan sebagai

$$H(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Bukti. Misalkan, $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$ merupakan graf pangkat pada grup bilangan bulat modulo dengan $n = p^k$, di mana $k \in \mathbb{N}$ dan p adalah bilangan prima. Menurut Teorema 3.1, $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$ merupakan graf lengkap, Sehingga jarak antara setiap pasangan simpul u dan v , dalam graf tersebut adalah $d(u,v) = 1$ untuk semua $u, v \in V(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})$. Karena ini merupakan graf lengkap, maka jumlah sisi yang dimiliki adalah n kombinasi 2:

$$\begin{aligned}
C_2^n &= \frac{n!}{2!(n-2)!} \\
&= \frac{n(n-1)(n-2)!}{2!(n-2)!} \\
&= \frac{n(n-1)}{2}.
\end{aligned}$$

Dengan demikian, jumlah sisi pada graf lengkap $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$ adalah $\frac{n(n-1)}{2}$. Hasil ini sekaligus menunjukkan bahwa nilai indeks Harary dari graf tersebut juga dapat ditentukan secara langsung berdasarkan banyaknya sisi yang terbentuk. Sehingga diperoleh Indeks Harary dari $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
H(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) &= \sum_{u,v \in V(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})} \frac{1}{d(u,v)} \\
&= C_2^n \left(\frac{1}{1} \right) \\
&= \frac{n(n-1)}{2} \times 1 \\
&= \frac{n(n-1)}{2}
\end{aligned}$$

Sehingga, dapat disimpulkan bahwa nilai indeks Harary untuk graf pangkat $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$ adalah $\frac{n(n-1)}{2}$. Hasil ini menegaskan bahwa indeks Harary pada graf pangkat bilangan bulat n hanya bergantung pada jumlah simpul yang dimiliki.

Indeks Harary dari graf koprima dari grup dihedral dengan orde pangkat prima

Selanjutnya, pembahasan diarahkan pada struktur yang dibangun atas grup dihedral dengan orde berupa bilangan prima. Pada bagian ini akan dipaparkan suatu hasil yang bersifat umum dan dapat digunakan untuk menggambarkan keteraturan yang muncul pada kondisi tersebut. Formulasi yang diperoleh tidak hanya menunjukkan hubungan antar elemen dalam grup, tetapi juga memberikan pemahaman lebih dalam mengenai pola yang konsisten ketika orde yang digunakan adalah bilangan prima.

Teorema 3.6 [5] Misalkan $\Gamma_{D_{2n}}$ adalah graf koprima dari grup dihedral D_{2n} . Jika $n = p^k$ dengan p adalah bilangan prima dimana $p \neq 2$ dan $k \in \mathbb{N}$, maka Indeks Harary dari graf koprima dari grup dihedral tersebut adalah

$$H(\Gamma_{D_{2n}}) = 3n^2 - 5n + 4.$$

Bukti. Misalkan $\Gamma_{D_{2n}}$ menyatakan graf yang dibangun dari grup dihedral D_{2n} . Ambil $n = p^k$ dengan p bilangan prima, $p \neq 2$, dan $k \in \mathbb{N}$. Berdasarkan konstruksi tersebut, graf yang diperoleh dibagi menjadi tiga himpunan partisi, yaitu $V_1 = \{e\}$, $V_2 = \{a, a^2, \dots, a^{n-1}\}$, dan $V_3 = \{b, ab, a^2b, \dots, a^{n-1}b\}$. Dari Teorema 3.3 diketahui bahwa graf yang terbentuk adalah graf tripartit lengkap. Konsekuensinya, jarak antara simpul yang berasal dari partisi berbeda bernilai satu, sedangkan simpul-simpul yang berbeda dalam partisi yang sama berjarak dua. Dengan memanfaatkan sifat ini, perhitungan dapat dilakukan dengan menjumlahkan kebalikan jarak untuk setiap pasang simpul yang berbeda, sehingga diperoleh hasil sebagai berikut

$$\begin{aligned}
H(\Gamma_{D_{2n}}) &= \sum_{u,v \in V(G)} \frac{1}{d(u,v)} \\
&= \sum_{v \in V_1, w \in V_2} \frac{1}{d(u,v)} + \sum_{v \in V_1, w \in V_3} \frac{1}{d(u,v)} + \sum_{v \in V_2, w \in V_3} \frac{1}{d(u,v)} + \sum_{v,w \in V_2} \frac{1}{d(u,v)} \\
&\quad + \sum_{v,w \in V_3} \frac{1}{d(u,v)}.
\end{aligned}$$

Dengan mengacu pada definisi grup dihedral dan teorema 3.3, dapat dihitung bahwa jumlah pasangan simpul yang menghubungkan V_1 dengan V_2 adalah sebanyak $n - 1$. Untuk pasangan simpul antara V_1 dan V_3 jumlahnya menjadi n , sedangkan antara V_2 dan V_3 diperoleh $n(n - 1)$. Sementara itu, jika kita melihat simpul-simpul yang berada dalam partisi yang sama namun berbeda posisi, banyaknya pasangan tersebut dapat dirumuskan dengan $C_2^{n-1} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$. Dari sini, perhitungan selanjutnya dapat dilakukan secara lebih sistematis.

$$\begin{aligned}
H(\Gamma_{D_{2n}}) &= [1(n - 1) + 1(n) + 1(n(n - 1)) + 2C_2^{n-1} + 1C_2^{n-1}] \\
&= [n^2 + n + (n - 1)(n - 2) + (n - 1)(n - 2)] \\
&= [n^2 + n + 2(n^2 - 3n + 2)] \\
&= 3n^2 - 5n + 4.
\end{aligned}$$

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa nilai indeks Harary untuk graf koprima dari grup dihedral diperoleh dalam bentuk persamaan kuadrat, yaitu $H(\Gamma_{D_{2n}}) = 3n^2 - 5n + 4$. Hasil ini memberikan gambaran bahwa indeks Harary pada graf dihedral bergantung secara langsung pada nilai n , sehingga dapat dijadikan dasar untuk analisis lebih lanjut mengenai sifat-sifat topologis graf tersebut

4. Kesimpulan

Berdasarkan hasil yang didapatkan, diperoleh beberapa kesimpulan mengenai indeks Harary sebagai berikut

- Untuk graf pangkat jika berorde $n = p^k$ maka didapatkan nilai indeks Harary nya adalah $(n - 1)^2$.
- Untuk graf pangkat pada grup bilangan bulat modulo dengan $n = p^k$ didapatkan nilai indeks Harary adalah $\frac{n(n-1)}{2}$.
- Untuk graf koprima dari grup dihedral jika $n = p^k$ nilai indeks Harary adalah $3n^2 - 5n + 4$.

Ucapan Terima Kasih

Ucapan terima kasih saya sampaikan kepada dosen pembimbing yang telah memberikan bimbingan, arahan, serta motivasi yang berharga selama proses penyusunan karya ini. Saya juga berterima kasih kepada rekan-rekan yang telah berbagi saran, kritik membangun, dan berdiskusi sehingga penelitian ini dapat berkembang lebih baik. Semoga penelitian ini memberikan manfaat dan berkontribusi bagi pengembangan ilmu pengetahuan.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Suryanti, S., 2017, Teori Grup (Struktur Aljabar 1), UGM Press, Gresik.
- [2] Devandra, U., & Anjali, L. C. 2022. Mendeskripsikan Grup Menggunakan Berbagai Graf. Ujmc (Unisda Journal Of Mathematics And Computer Science), 8(1), 27-34.
- [3] Nurhabibah, N., Syarifudin, A. G., Wardhana, I. G. A. W., & Aini, Q. (2021). The Intersection Graph Of A Dihedral Group. Eigen Mathematics Journal, 68-73. <https://doi.org/10.29303/emj.v4i2.119>
- [4] Audil, R., Wardhan, I. G. A. W., Abdurahim, M. R. A., & Aini, Q. (2024). Indeks Hyper-Wiener, Harary, Szeged, Dan Padmakar-Ivan Dari Graf Pangkat Pada Grup Bilangan Bulat Modulo, Universitas Mataram, https://eprints.unram.ac.id/46820/2/ARTIKEL%20ILMIAH_ROHYATUL%20AUDIL_G1D020058.

- pdf.
- [5] Gayatri, M. R., Fadhilah, R., Lestari, S. T., Pratiwi, L. F., Abdurahim, A., & Wardhana, I. G. A. W. (2023). Topology Index of the Coprime Graph for Dihedral Group of Prime Power Order. *Jurnal Diferensial*, 5(2), 126-134. <https://doi.org/10.35508/jd.v5i2.12462>
 - [6] Juliana, R., Masriani, M., Wardhana, I. G. A. W., Switrayni, N. W., & Irwansyah, I. (2020). Coprime Graph Of Integers Modulo N Group And Its Subgroups. *Journal Of Fundamental Mathematics And Applications (JFMA)*, 3(1), 15-18. <https://doi.org/10.14710/jfma.v3i1.7412>
 - [7] Syarifudin, A. G., Wardhana, I. G. A. W., Switrayni, N. W., & Aini, Q. (2021). The Clique Numbers And Chromatic Numbers Of The Coprime Graph Of A Dihedral Group. In *Iop Conference Series: Materials Science And Engineering* (Vol. 1115, No. 1, P. 012083). Iop Publishing. <https://doi.org/10.31764/jtam.v7i2.13099>
 - [8] Yatin, B. Z., Gayatri, M. R., Wardhana, I. G. A. W., & Prayanti, B. D. A. (2023). Indeks Hyper-Wiener Dan Indeks Padmakar-Ivan Dari Graf Koprime Dari Grup Dihedral. *Jurnal Riset Dan Aplikasi Matematika (JRAM)*, 7(2), 138-147. <https://doi.org/10.26740/jram.v7n2.p138-147>
 - [9] Wahidah, F. M., Hijriati, N. I., & Wardhana, I. G. A. W. (2025). Indeks Sombor, Indeks Sombor Tereduksi, Dan Indeks Sombor Rata-Rata Dari Graf Non-Koprime Pada Grup Dihedral. *Jurnal Riset Dan Aplikasi Matematika (JRAM)*, 9(1), 16-25.
 - [10] Zahro, F., & Budayasa, I. K. (2018). Indeks Harary Graf Hamilton, Semi-Hamilton Dan Hamilton-Kuat. *Mathunesa: Jurnal Ilmiah Matematika*, 6(2).
 - [11] Chartrand, G., Lesniak, L., & Zhang, P., 2016, *Graphs & Digraphs Sixth Edition*, Crc Press Taylor & Francis Group, London.
 - [12] Juliana, R. (2022). Karakteristik graf pembagi nol pada gelanggang bilangan bulat modulo. *Fraktal: Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika*, 3(2), 1-8.
 - [13] Devandra, U. (2023). Indeks harary pada graf koprime pada grup bilangan bulat modulo berorde pangkat prima. *Fraktal: Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika*, 4(1), 26-30.
 - [14] Gazir, A., & Wardhana, I. G. A. W. (2019). Subgrup Non Trivial Dari Grup Dihedral. *Eigen Mathematics Journal*, 73-76. <https://doi.org/10.29303/emj.v1i2.26>
 - [15] Syechah, B. N., Asmarani, E. Y., Syarifudin, A. G., Anggraeni, D. P., & Wardhana, I. G. A. W. (2022). Representasi Graf Pangkat Pada Grup Bilangan Bulat Modulo Berorde Bilangan Prima. *Evolusi: Journal Of Mathematics And Sciences*, 6(2), 99-104.
 - [16] Ma, X., Wei, H., & Yang, L. (2014). The Coprime Graph Of A Group.
 - [17] Putra, L. R. W., Awanis, Z. Y., Salwa, S., Aini, Q., & Wardhana, I. G. A. W. (2023). The Power Graph Representation For Integer Modulo Group With Power Prime Order. *Barekeng: Jurnal Ilmu Matematika Dan Terapan*, 17(3), 1393-1400. <https://doi.org/10.30598/barekengvol17iss3pp1393-1400>