



Indeks Szeged dari Berbagai Representasi Graf dari Grup Bilangan Bulat Modulo

(Szeged Index of Various Graph Representations of the Modulo Integer Group)

Muthahira Qalbi D¹, Fariz Maulana^{1*}

1. Program Studi Matematika, Universitas Mataram, Indonesia.

ABSTRACT

The Szeged index is a topological index used to analyze graph structures based on vertex distances. This article reviews the application of the Szeged index on three types of graphs constructed from modular integer groups, namely power graphs, non-coprime graphs, and prime coprime graphs. Each graph has a different connection rule, resulting in variations in the Szeged index values. This study aims to compare the results across the graph types and examine how the group structure influences the index values.

Keywords: Szeged index, power graph, prime coprime graph, non-coprime graph, modular group

ABSTRAK

Indeks Szeged merupakan salah satu dari indeks topologi yang digunakan untuk menganalisis struktur graf berdasarkan jarak antar simpul. Artikel ini mereview penerapan indeks Szeged pada tiga jenis graf yang dibangun dari grup bilangan bulat modulo, yaitu graf pangkat, graf non-koprime, dan graf koprime prima. Setiap graf memiliki pola keterhubungan berbeda, sehingga menghasilkan perbedaan dalam perhitungan indeks Szeged. Kajian ini bertujuan untuk membandingkan hasil indeks dari masing-masing graf dan meninjau pengaruh struktur grup terhadap nilai indeks tersebut.

Keywords: indeks Szeged, graf pangkat, graf koprime prima, graf non koprime, grup modulo

Diterima: 11-06-2025;

Doi: <https://doi.org/10.29303/semeton.v3i1.308>

Disetujui: 30-04-2026;

1. Pendahuluan

Dalam teori graf, graf didefinisikan sebagai struktur matematika yang terdiri atas himpunan simpul (*vertices*) dan sisi (*edges*). Graf dapat digunakan untuk merepresentasikan hubungan antar objek, baik dalam konteks fisik maupun abstrak. Seiring perkembangannya, teori graf tidak hanya diterapkan dalam bidang ilmu komputer dan jaringan, tetapi juga dalam bidang kimia untuk merepresentasikan struktur molekul. Selain itu, teori graf juga telah diintegrasikan dengan struktur aljabar, seperti grup bilangan bulat modulo. Beberapa studi terkait representasi graf pada grup bilangan bulat modulo diantaranya adalah Representasi Graf Pangkat Pada Grup Bilangan Bulat Modulo Berorde Bilangan Prima [1], Graf Koprime Pada Grup Bilangan Bulat Modulo Berorde Pangkat Prima [2], Graf Koprime dari Grup Modulo n dan Subgrup [3].

* Corresponding author
e-mail: fariz.maulana@unram.ac.id



Indeks Szeged merupakan salah satu indeks topologi yang banyak digunakan untuk lebih memahami bentuk graf. Pada grup bilangan bulat modulo n , beberapa jenis graf telah dikaji untuk mengetahui bagaimana indeks Szeged memiliki formula yang berbeda-beda pada struktur graf yang berbeda. Pada penelitian Ghoffari et al. memperkenalkan graf non-koprime, yaitu graf yang simpul-simpulnya merepresentasikan elemen dari \mathbb{Z}_n (kecuali elemen identitas), dan dua simpul saling terhubung jika orde keduanya tidak saling prima. Dalam graf ini, indeks Szeged dihitung berdasarkan jumlah simpul yang lebih dekat terhadap salah satu ujung dari setiap sisi, dan ditemukan bahwa ketika n adalah pangkat bilangan prima, nilai indeks Szeged sama dengan indeks Hyper-Wiener. Namun, ketika n merupakan hasil kali dua bilangan prima berbeda, nilai kedua indeks tersebut tidak lagi identik [4]. Artikel kedua oleh Audil et al. membahas graf pangkat, di mana dua simpul terhubung jika salah satu merupakan hasil pemangkatan dari yang lain dalam grup. Untuk ordo grup $n = p^k$ (dengan p bilangan prima), graf pangkat ini membentuk graf lengkap, sehingga setiap pasangan simpul saling terhubung. Akibatnya, indeks Szeged dapat ditentukan secara langsung dari rumus umum berdasarkan kombinasi simpul, karena semua simpul memiliki hubungan jarak yang simetris dan setara [5]. Sementara itu, artikel ketiga oleh Abdurahim et al. fokus pada graf koprime prima, di mana dua simpul dalam \mathbb{Z}_n terhubung jika dan hanya jika Faktor Persekutuan Terbesar (FPB) dari orde simpul-simpul adalah 1 atau bilangan prima. Dalam graf koprime prima, indeks Szeged diperoleh melalui pembagian himpunan simpul ke dalam beberapa partisi berdasarkan orde, dan rumus umum disusun berdasarkan jumlah simpul yang lebih dekat ke masing-masing simpul dalam setiap sisi. Penelitian ini juga mengkaji pengaruh nilai eksponen k terhadap perubahan indeks Szeged pada graf koprime prima dengan ordo $n = p^k$ [6].

2. Hasil dan Pembahasan

Sebelum membahas lebih lanjut, disajikan terlebih dahulu beberapa definisi dasar yang akan digunakan dalam pembahasan indeks Szeged pada representasi graf dari grup bilangan bulat modulo.

Grup Bilangan Bulat Modulo: Grup bilangan bulat modulo n adalah struktur aljabar yang terbentuk dari himpunan bilangan bulat yang dioperasikan dengan penjumlahan modulo suatu bilangan bulat positif n . Grup ini ditulis sebagai \mathbb{Z}_n dan banyak digunakan dalam berbagai bidang matematika, termasuk dalam pembentukan graf.

Definisi 2.1[3] Suatu grup dikatakan grup bilangan bulat modulo berorde n , adalah jika grup yang terbentuk dari himpunan semua bilangan bulat non-negatif yang menggunakan operasi modulo n . Atau dapat disimbolkan sebagai himpunan $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$ yang memiliki operasi modulo n .

Untuk mendukung pembahasan mengenai indeks Szeged pada graf, berikut disampaikan definisi dari indeks Szeged yang merupakan salah satu indeks penting dalam teori graf.

Indeks Szeged: Salah satu indeks penting dalam teori graf adalah indeks Szeged, yang digunakan untuk mengukur struktur internal suatu graf berdasarkan jarak antar simpul. Indeks ini banyak diaplikasikan dalam kimia matematika dan teori jaringan. Dalam kimia matematika, indeks ini digunakan untuk memprediksi sifat fisik dan kimia suatu molekul, seperti titik didih, stabilitas, serta tingkat toksisitas senyawa. Sementara itu, dalam teori jaringan, indeks topologi berperan dalam mengukur tingkat konektivitas, efisiensi, dan keandalan suatu jaringan, baik jaringan sosial, transportasi, maupun jaringan biologis.

Definisi 2.2 [7] Indeks Szeged graf G disimbolkan dengan $S_z(G)$, $S_z(G)$ didefinisikan sebagai:

$$S_z(G) = \sum_{uv \in E(G)} (n_u(e|G) \cdot n_v(e|G))$$

dengan $n_u(e|G)$ merupakan seluruh simpul yang memiliki jarak dengan simpul u kurang dari simpul v dan $n_v(e|G)$ adalah seluruh simpul yang memiliki jarak dengan simpul v kurang dari simpul u .

Selanjutnya, untuk menggambarkan struktur graf yang dibangun dari suatu grup, digunakan konsep graf pangkat dari grup seperti yang didefinisikan berikut ini.

Graf pangkat: Merupakan salah satu representasi graf yang digunakan untuk menggambarkan hubungan antara elemen-elemen dalam suatu grup. Dua elemen pada grup dihubungkan dalam graf ini apabila memenuhi syarat tertentu yang berkaitan dengan eksponen serta operasi pada grup tersebut.

Definisi 2.3 [8] Graf pangkat dari Grup G dapat disimbolkan sebagai $P(G)$ merupakan graf sederhana yang himpunan titiknya berupa elemen-elemen pada G dan dua titik $a, b \in G$ bertetangga jika dan hanya jika $a \neq b$ dan $a^m = b$ atau $b^m = a$ untuk suatu bilangan asli m .

Agar lebih memahami bentuk graf yang akan muncul dari hasil representasi grup, berikut diberikan definisi graf lengkap, yaitu graf yang setiap simpulnya saling bertetangga.

Teorema 2.1[9] Diberikan sebuah grup bilangan bulat modulo n (\mathbb{Z}_n) dengan operasi modulo. Jika $n = p^k$ dengan p bilangan prima dan $k \in \mathbb{N}$, maka graf pangkat dari grup bilangan bulat $P(\mathbb{Z}_n)$ adalah graf lengkap K_n .

Bukti: Misalkan $n = p^k$, dengan p bilangan prima. Ambil sebarang $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_n$.

1. Jika $(a, n) \neq 1$ dan $(b, n) \neq 1$, maka $a = p^l$ dan $b = p^m$ dengan $l < m$. Maka terdapat $r = p^{m-l}$ sehingga $b = a^r$. Jadi, \bar{a} dan \bar{b} saling bertetangga.
2. Jika $(a, n) = 1$ dan $(b, n) \neq 1$, maka a relatif prima terhadap n . Karena operasi yang digunakan adalah penjumlahan modulo n , maka terdapat $r \in \mathbb{N}$ sehingga $\bar{b} = \bar{a}^r$. Jadi, \bar{a} dan \bar{b} bertetangga.
3. Jika $(a, n) \neq 1$ dan $(b, n) = 1$, pembuktiannya serupa dengan kasus (2).

Dengan demikian, untuk setiap pasangan $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_n$, selalu terdapat $r \in \mathbb{N}$ sehingga $\bar{b} = \bar{a}^r$ atau sebaliknya. Maka, graf pangkat dari grup \mathbb{Z}_n adalah graf lengkap K_n .

Teorema 2.2 [5] Diberikan graf pangkat $P(\mathbb{Z}_n)$ pada grup bilangan bulat modulo n dengan $n = p^k$ dengan p bilangan prima dan $k \in \mathbb{N}$. Indeks Szeged dari $P(G)$ adalah

$$S_z(P(\mathbb{Z}_n)) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Bukti: Misalkan $P(\mathbb{Z}_n)$ merupakan graf pangkat pada grup bilangan bulat modulo n . Jika $n = p^k$ dengan p bilangan prima dan $k \geq 2$ bilangan bulat. Berdasarkan Teorema 2.1, $P(\mathbb{Z}_n)$ merupakan graf lengkap, sehingga setiap simpul saling bertetangga. Akibatnya $d(u, v) = 1, \forall u, v \in V(P(\mathbb{Z}_n))$. Oleh karena itu, untuk sebarang $uv = e \in E(P(\mathbb{Z}_n))$ berakibat $n_u(e|P(\mathbb{Z}_n)) = 1$ dan $n_v(e|P(\mathbb{Z}_n)) = 1$. Sehingga diperoleh indeks Szeged dari $P(\mathbb{Z}_n)$ adalah:

$$\begin{aligned} S_z(P(\mathbb{Z}_n)) &= \sum_{uv \in E(G)} (n_u(e|P(\mathbb{Z}_n)) \cdot n_v(e|P(\mathbb{Z}_n))) \\ &= C_2^n \cdot 1 \cdot 1 \end{aligned}$$

Setelah itu C_2^n dijabarkan

$$\begin{aligned} &= \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot 1 \\ S_z(P(\mathbb{Z}_n)) &= \frac{n \cdot (n-1)}{2}. \end{aligned}$$

Selain graf pangkat, terdapat representasi graf lain yang terbentuk dari grup adalah graf koprima prima. Sebelum dibahas lebih jauh mengenai indeks Szeged pada graf ini, berikut diberikan definisi dari graf koprima prima.

Graf koprima prima: Graf ini dibangun berdasarkan relasi keterhubungan antar elemen grup yang ditentukan oleh sifat koprima atau keterbagian antara ukuran (order) elemen-elemennya. Struktur graf ini memberikan sudut pandang baru dalam memahami hubungan antar elemen grup berdasarkan faktor persekutuan terbesarnya.

Definisi 2.5 [10] Diberikan G grup berhingga sedemikian hingga $|G| > 2$. Suatu graf koprima prima didefinisikan sebagai $\Gamma_G = (V, E)$ yaitu himpunan simpul V merupakan seluruh elemen grup G dan sebarang dua simpul berbeda x, y dapat dikatakan saling bertetangga jika dan hanya jika $FPB(|x|, |y|) = 1$ atau $FPB(|x|, |y|) = p$.

Teorema 2.3 [6] Diberikan Γ_G graf koprima prima dari grup \mathbb{Z}_n dimana $n = p^k$ dimana p bilangan prima dan $k \geq 2$ bilangan bulat, maka indeks Szeged dari graf koprima prima adalah:

$$S_z(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) = -p^{k+1} - 2p^{k+2} + p^{2k+1} + p^3 + \frac{3}{2}p^2 - \frac{1}{2}p$$

Bukti: Himpunan V dipartisi menjadi dua partisi, yaitu:

$$V_1 = \{0, p^{k-1}, 2p^{k-1}, \dots, (p-1)p^{k-1}\}$$

$$V_2 = \{0, 1, 2, \dots, p^k - 1\} \setminus V_1$$

Perhatikan tiga kasus :

a. Kasus $u_1, v_1 \in V_1$ dengan $u_1 \neq v_1$

Banyak sisi yang terbentuk dari dua vertex berbeda di V_1 yaitu u_1 dan v_1 dengan $u_1 \neq v_1$ adalah S_{p-1} .

$$\begin{aligned} \sum_{u_1 v_1 \in E(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})} (n_u(e|\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) \cdot n_v(e|\Gamma_{\mathbb{Z}_n})) &= (\mathbf{1}, \mathbf{1}) S_{p-1} \\ &= \frac{1}{2}(p-1)p \\ &= \frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{2}p \end{aligned}$$

b. Kasus $u_1 \in V_1, v_2 \in V_2$

Sebarang simpul $u_1 \in V_1$ dan $v_2 \in V_2$ bertetangga. Dengan demikian, jumlah simpul yang jaraknya lebih dekat dengan simpul u_1 daripada ke v_2 adalah semua simpul di V_2 tetapi tidak termasuk v_2 itu sendiri. Artinya, $n_u(u_1 v_2) = p^k - p - 1$. Sebaliknya, simpul yang jaraknya lebih dekat ke v_2 daripada u_1 adalah tidak ada atau $n_v(u_1 v_2) = 1$. Selain itu banyaknya sisi yang menghubungkan V_1 ke V_2 (tidak untuk sebaliknya) adalah $(p^{k-1} - 1)S_p$.

$$\begin{aligned} \sum_{u_1 v_2 \in E(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})} (n_u(e|\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) \cdot n_v(e|\Gamma_{\mathbb{Z}_n})) &= ((p^k - p - 1), \mathbf{1}) (p^{k-1} - 1) S_p \\ &= ((p^k - p - 1), \mathbf{1}) (p^{k-1} - 1) \left(\frac{1}{2} p(p+1) \right) \end{aligned}$$

- Lakukan penyederhanaan suku-suku sejenis:

$$= -\frac{3}{2}p^{k+1} - p^{k+2} + \frac{1}{2}p^{2k+1} + \frac{1}{2}p^{2k} - \frac{1}{2}p^k + \frac{1}{2}p^3 + p^2 + \frac{1}{2}p$$

c. Kasus $u_2 \in V_1, v_1 \in V_2$

Sebarang simpul $u_1 \in V_1$ dan $v_2 \in V_2$ bertetangga. Dengan demikian, simpul yang jaraknya lebih dekat u_2 kurang dari v_1 adalah tidak ada atau $n_v(v_2 u_1) = 1$. Sebaliknya simpul yang jaraknya lebih dekat ke u_2 daripada v_2 adalah semua simpul di V_2 tetapi tidak termasuk v_1 itu sendiri. Artinya, $n_u(v_2 u_1) = p^k - p - 1$. Selain itu banyaknya sisi yang menghubungkan V_2 ke V_1 (tidak untuk sebaliknya) adalah $(p^{k-1} - 1)S_{p-1}$.

$$\begin{aligned} S_z(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) &= \sum_{v_2 u_1 \in E(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})} (n_u(e|\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) \cdot n_v(e|\Gamma_{\mathbb{Z}_n})) = (\mathbf{1}(p^k - p - 1)) (p^{k-1} - 1) S_{p-1} \\ &= (p^k - p)(p^{k-1} - 1) \left(\frac{1}{2} (p-1)p \right) \end{aligned}$$

- Lakukan penyederhanaan aljabar dengan mengumpulkan suku sejenis

$$= p^{k+1} - p^{k+2} + \frac{1}{2}p^{2k+1} - \frac{1}{2}p^{2k} + \frac{1}{2}p^3 - \frac{1}{2}p^2$$

Berdasarkan tiga kasus a), b), c), diperoleh:

- Graf $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$ untuk $n = p^k$ dibagi menjadi dua kelas simpul V_1 dan V_2 . Maka sisi terbagi menjadi 3 kasus: $u_1 v_1$, $u_1 v_2$, dan $u_2 v_1$

$$\begin{aligned} S_z(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) &= \sum_{uv \in E(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})} (n_u(e|\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) \cdot n_v(e|\Gamma_{\mathbb{Z}_n})) \\ &= \sum_{u_1 v_1 \in E(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})} (n_u(e|\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) \cdot n_v(e|\Gamma_{\mathbb{Z}_n})) + \sum_{u_1 v_2 \in E(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})} (n_u(e|\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) \cdot n_v(e|\Gamma_{\mathbb{Z}_n})) \\ &\quad + \sum_{v_2 u_1 \in E(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})} (n_u(e|\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) \cdot n_v(e|\Gamma_{\mathbb{Z}_n})) \end{aligned}$$

- Hitung nilai $n_u(e|\Gamma_{\mathbb{Z}_n})$ dan $n_v(e|\Gamma_{\mathbb{Z}_n})$ untuk tiap kasus. Dari sini diperoleh bentuk aljabarnya berupa pangkah- p $p^{k+1}, p^{k+2}, p^{2k+1}, p^{2k}, p^3, p^2, p$

$$= \left(\frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{2}p\right) + \left(-\frac{3}{2}p^{k+1} - p^{k+2} + \frac{1}{2}p^{2k+1} + \frac{1}{2}p^{2k} - \frac{1}{2}p^k + \frac{1}{2}p^3 + p^2 + \frac{1}{2}p\right) \\ + \left(p^{k+1} - p^{k+2} + \frac{1}{2}p^{2k+1} - \frac{1}{2}p^{2k} + \frac{1}{2}p^3 - \frac{1}{2}p^2\right)$$

- Lakukan penyederhanaan aljabar dengan mengumpulkan suku sejenis

$$= \left(-\frac{3}{2}p^{k+1} - p^{k+2} + \frac{1}{2}p^{2k+1} + \frac{1}{2}p^{2k} - \frac{1}{2}p^k + \frac{1}{2}p^3 + \frac{3}{2}p^2\right) + \left(\frac{1}{2}p^{k+1} - p^{k+2} + \frac{1}{2}p^{2k+1} - \frac{1}{2}p^{2k} + \frac{1}{2}p^3 - \frac{1}{2}p\right)$$

- Maka diperoleh:

$$S_z(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) = -p^{k+1} - 2p^{k+2} + p^{2k+1} + p^3 + \frac{3}{2}p^2 - \frac{1}{2}p$$

Selain graf koprima dan graf pangkat, terdapat pula representasi lain dari grup bilangan bulat modulo yang dikenal dengan graf non-koprima. Definisi graf ini disampaikan sebagai berikut:

Graf non-koprima: Berbeda dengan graf koprima yang menghubungkan simpul berdasarkan hubungan saling takhabis dibagi, graf non-koprima justru menghubungkan dua simpul jika bilangan yang bersesuaian memiliki faktor persekutuan yang lebih besar dari satu. Representasi ini memberikan perspektif berbeda dalam melihat keterkaitan antar elemen dalam grup.

Definisi 2.6[11] Graf non-koprima adalah graf dari grup bilangan bulat modulo n . Graf non-koprima didefinisikan $\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_n}$ dimana setiap simpul menunjukkan elemen dari grup tersebut, kecuali elemen identitas. Dua simpul yang tidak sama x dan y dikatakan saling bertetangga jika dan hanya jika $FPB(|x|, |y|) \neq 1$

Teorema 2.4 Graf non-koprima dari grup bilangan bulat modulo n dengan $n = p^k$, dimana p bilangan prima dan $k \geq 2$ bilangan bulat, oleh karena itu graf non-koprima tersebut dikatakan graf lengkap $K_{(n-1)}$.

Bukti: Karena n adalah bilangan prima, maka diperoleh bahwa $|a| = n$ untuk semua $a = 1, 2, \dots, n-1$. Dengan demikian, $\gcd(|a|, |b|) \neq 1$ untuk setiap $b \in \mathbb{Z}_n$. Hal ini menunjukkan bahwa a dan b saling berhubungan (adjacent) pada graf tak-koprima $\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_n}$ untuk semua $b \in \mathbb{Z}_n - \{0\}$. Oleh karena itu, graf tak-koprima dari \mathbb{Z}_n merupakan graf lengkap K_{n-1} .

Teorema 2.5 Diberikan grup \mathbb{Z}_n dengan n merupakan pangkat bilangan prima, maka indeks Szeged dari graf non-koprima $\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_n}$ adalah:

$$S_z(\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_n}) = (n-1)(n-2).$$

Bukti: Berdasarkan Teorema 2.3, karena $\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_n}$ merupakan suatu graf lengkap $K_{(n-1)}$, oleh karena itu untuk sebarang $x, y \in V(\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_n})$, jumlah simpul yang lebih dekat ke x daripada ke y adalah 1, yaitu simpul x itu sendiri, begitupun juga sebaliknya.

$$n_x(xy|\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_n}) \cdot n_y(xy|\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_n}) = 1$$

karena $\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_n}$ memiliki $n-1$ simpul yang berbeda, maka:

$$S_z(\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_n}) = (n-1)(n-2).$$

3. Kesimpulan

Penelitian ini meninjau penerapan dari indeks Szeged dari tiga jenis graf yang dibangun dari grup bilangan bulat modulo, yaitu graf pangkat, graf non-koprima, dan graf koprima prima. Hasil tinjauan menunjukkan bahwa setiap jenis graf menghasilkan rumus indeks yang berbeda. Nilai indeks Szeged untuk graf pangkat, graf koprima dan graf non koprima berturut-turut adalah $S_z(P(\mathbb{Z}_n)) = \frac{n(n-1)}{2}$, $S_z(\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_n}) = (n-1)(n-2)$, $S_z(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) = -p^{k+1} - 2p^{k+2} + p^{2k+1} + p^3 + \frac{3}{2}p^2 - \frac{1}{2}p$. Perbedaan formula ini menunjukkan bahwa struktur dari grup modulo memengaruhi nilai indeks Szeged. Dengan demikian, kajian ini memberikan pemahaman lebih mengenai hubungan antar struktur aljabar grup dan karakteristik topologi grafnya.

Ucapan Terima Kasih

Saya sebagai penulis artikel ini mengucapkan terima kasih kepada dosen pembimbing yang telah membimbing dalam pembuatan artikel ini, serta rekan-rekan saya yang sudah memberikan dukungan, saran, dan motivasi selama proses penulisan artikel. Saya ucapkan terima kasih kepada institusi yang sudah menyediakan fasilitas dan sumber referensi yang membantu tersusunnya artikel ini dengan baik.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] B. N. Syechah, E. Y. Asmarani, A. G. Syarifudin, D. P. Anggraeni, and I. G. A. W. Wardhana, "Representasi graf pangkat pada grup bilangan bulat modulo berorde bilangan prima," *Evolusi: Journal of Mathematics and Sciences*, vol. 6, no. 2, pp. 99–104, 2022. <https://ejournal.unwmataram.ac.id/?journal=evos&page=article&op=view&path%5B%5D=1304>
- [2] M. Nusantara, U. Devandra, and L. Chandini Anjali, "Indeks Harary Pada Graf Koprime Pada Grup Bilangan Bulat Modulo Berorde Pangkat Prima," *Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika*, vol. 4, no. 1, pp. 26–30, 2023. <https://doi.org/10.35508/fractal.v4i1.10520>
- [3] R. Juliana, M. Masriani, I. G. A. W. Wardhana, N. W. Switrayni, and I. Irwansyah, "Coprime Graph Of Integers Modulo n Group And Its Subgroups," *Journal of Fundamental Mathematics and Applications (JFMA)*, vol. 3, no. 1, pp. 15–18, Jun. 2020, <https://doi.org/10.14710/jfma.v3i1.7412>.
- [4] L. Hasan Ghoffari, I. Gede, A. Wisnu Wardhana, K. Dewi, and I. N. Suparta, "Eigen Mathematics Journal Hyper-Wiener and Szeged Indices of non-Coprime Graphs of Modulo Integer Groups," vol. 8, no. 1, 2025, <https://doi.org/10.29303/emj.v8i1.244>
- [5] R. Audil, I. G. A. W. Wardhana, M. R. Alfian, Abdurahim, and Q. Aini, "Indeks Hyper-Wiener, Harary, Szeged, Dan Padmakar-Ivan Dari Graf Pangkat Pada Grup Bilangan Bulat Modulo Hyper-Wiener, Harary, Szeged, And Padmakar-Ivan Indices Of Power Graphs On Integer Group Modulo".
- [6] A. Abdurahim *et al.*, "Indeks Topologi Padmakar Ivan dan Szeged pada Graf Koprime Prima dari Grup Bilangan Bulat Modulo," *Square : Journal of Mathematics and Mathematics Education*, vol. 6, no. 2, pp. 139–149, Oct. 2024, <https://doi.org/10.21580/square.2024.6.2.22836>.
- [7] P. V. Khadikar, N. V. Deshpande, P. P. Kale, A. Dobrynin, I. Gutman, and G. Domotor, "The Szeged index and an analogy with the Wiener index," *J Chem Inf Comput Sci*, vol. 35, no. 3, pp. 547–550, 1995.
- [8] T. T. Chelvam and M. Sattanathan, "Power graph of finite abelian groups," *Algebra and Discrete Mathematics*, vol. 16, no. 1, 2018. <https://admjournal.luguniv.edu.ua/index.php/adm/article/view/753>
- [9] L. R. W. Putra, Z. Y. Awanis, S. Salwa, Q. Aini, and I. G. A. W. Wardhana, "The Power Graph Representation For Integer Modulo Group With Power Prime Order," *BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan*, vol. 17, no. 3, pp. 1393–1400, Sep. 2023, <https://doi.org/10.30598/barekengvol17iss3pp1393-1400>.
- [10] A. Adhikari and S. Banerjee, "Prime coprime graph of a finite group," *Novi Sad Journal of Mathematics*, vol. 52, no. 2, pp. 41–59, 2022, <https://doi.org/10.30755/NSJOM.11151>
- [11] M. Masriani, R. Juliana, A. G. Syarifudin, I. G. A. W. Wardhana, I. Irwansyah, and N. W. Switrayni, "Some Result Of Non-Coprime Graph Of Integers Modulo N Group For n A Prime Power," *Journal of Fundamental Mathematics and Applications (JFMA)*, vol. 3, no. 2, pp. 107–111, Nov. 2020, <https://doi.org/10.14710/jfma.v3i2.8713>.