Volume. 3 No 1 April (2026)

e-ISSN: 3062-7737
p-ISSN: 3063-2137

Semeton Mathematics Journal

Homepage jurnal: http://eigen.unram.ac.id/semeton

Literature Review: Fixed Point Generalizations of the Banach Contraction Principle in Classical Metric Spaces

Syamsuddin Mas'ud[1]*

[1.] Program Studi Matematika, Universitas Negeri Makassar, Indonesia.

ABSTRACT

The Banach contraction principle (1922) holds a central position in fixed point theory on metric spaces. Over time, various generalizations have emerged to weaken the contraction condition while retaining the guarantee of a fixed point. However, simple reviews that map the logical relationships among these generalizations are still limited, especially in the Indonesian language. This article presents a literature review of six main classes of generalizations of the Banach contraction principle in classical metric spaces, namely Boyd-Wong (1969), Meir-Keeler (1969), Ćirić quasi-contraction (1974), Reich (1971), weak φ-contraction (Berinde, 2004), and orbital contraction (Rus-Hicks-Rhoades). The selection is restricted to single-valued mappings on complete metric spaces. Each class is described by its definition, fixed point theorem, a note on when the condition reduces to the original Banach contraction, and a brief example (or a reference to the original literature for more complex cases). Based on a comparative analysis, an implication table is constructed, showing that the Banach class is the strongest (it implies all other classes), Ćirić implies Reich but not conversely, and the Boyd-Wong, Meir-Keeler, weak φ-contraction, and orbital classes are mutually independent. This review concludes that the visual implication map, the simplified language, and the explicit reduction notes to the Banach case are three main contributions that distinguish it from previous surveys. Five directions for further research are also proposed, including extensions to non-complete metric spaces or to b-metric spaces.

Keywords: fixed point theory; Banach contraction principle; metric space; generalization; implication map

ABSTRAK

Prinsip kontraksi Banach (1922) menempati posisi sentral dalam teori titik tetap pada ruang metrik. Seiring waktu, muncul berbagai perumuman yang bertujuan melonggarkan syarat kontraksi tanpa kehilangan jaminan titik tetap. Namun, tinjauan yang secara sederhana memetakan hubungan logis antarperumuman tersebut masih terbatas, khususnya dalam bahasa Indonesia. Artikel ini menyajikan tinjauan literatur terhadap enam kelas utama perumuman kontraksi Banach pada ruang metrik klasik, yaitu kontraksi Boyd-Wong (1969), Meir-Keeler (1969), quasi Ćirić (1974), Reich (1971), weak φ-contraction (Berinde, 2004), dan kontraksi orbital (Rus-Hicks-Rhoades). Pemilihan dibatasi pada pemetaan bernilai tunggal pada ruang metrik lengkap. Setiap kelas diuraikan definisi, teorema titik tetap, catatan kapan kondisi tersebut mereduksi ke kontraksi Banach, serta contoh singkat (atau rujukan ke literatur asli untuk kasus rumit). Berdasarkan analisis komparatif, disusun tabel implikasi yang menunjukkan bahwa kelas Banach merupakan syarat terkuat (mengimplikasikan semua kelas lain), Ćirić mengimplikasikan Reich tetapi tidak sebaliknya, dan kelas Boyd-Wong, Meir-Keeler, weak φ-contraction, serta orbital saling independen. Tinjauan ini menyimpulkan bahwa penyajian peta implikasi secara visual, penyederhanaan bahasa, serta penjelasan kondisi reduksi ke Banach merupakan tiga kontribusi utama yang membedakannya dari ulasan sebelumnya. Lima arah penelitian lanjutan juga diusulkan, antara lain

* Corresponding author
e-mail: syamsuddinm@unm.ac.id

perluasan ke ruang metrik tak lengkap atau ke ruang b-metrik.

Keywords: teori titik tetap; prinsip kontraksi Banach; ruang metrik; perumuman; peta implikasi

Diterima: 30-04-2026; Doi: https://doi.org/10.29303/semeton.v3i1.374
Disetujui: 11-05-2026;

1. Pendahuluan

Prinsip Kontraksi Banach yang pertama kali dikemukakan oleh Stefan Banach pada tahun 1922 [1] merupakan salah satu konsep paling fundamental dalam analisis matematika, khususnya dalam kajian tentang keberadaan dan ketunggalan titik tetap. Prinsip ini tidak hanya menjadi landasan utama bagi pengembangan teori titik tetap pada ruang metrik, tetapi juga memiliki peran yang sangat besar dalam berbagai cabang matematika terapan, seperti persamaan diferensial, persamaan integral, dan teori aproksimasi. Untuk dapat memahami secara utuh prinsip tersebut, seseorang terlebih dahulu harus menguasai konsep dasar tentang ruang metrik, khususnya ruang metrik klasik sebagaimana didefinisikan dalam kerangka Fréchet dan Hausdorff. Pemahaman tentang struktur dan sifat-sifat ruang metrik menjadi prasyarat mutlak sebelum memasuki pembahasan tentang prinsip kontraksi Banach. Oleh karena itu, definisi formal mengenai ruang metrik (klasik) disajikan pada definisi berikut yang merujuk pada literatur [1-2].

Definisi 1.1 *Diberikan himpunan tak kosong X dan pemetaan $d: X \times X \to [0, \infty)$ dengan sifat bahwa untuk setiap $x, y, z \in X$, berlaku*

i) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

ii) $d(x, y) = d(y, x)$

iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Pemetaan d ini disebut metrik atas X dan (X, d) disebut ruang metrik.

Prinsip Kontraksi Banach secara formal menyatakan bahwa jika suatu pemetaan pada ruang metrik lengkap bersifat kontraktif, artinya jarak antara bayangan dua titik selalu lebih kecil dari jarak kedua titik tersebut dengan faktor pengali tetap kurang dari satu, maka pemetaan tersebut dijamin memiliki tepat satu titik tetap. Lebih jauh lagi, titik tetap tersebut dapat dihampiri melalui iterasi berulang dengan sebarang titik awal. Dengan kata lain, teorema ini tidak hanya menjamin eksistensi dan ketunggalan, tetapi juga memberikan prosedur konstruktif untuk menemukan titik tetap tersebut. Pernyataan lengkapnya adalah sebagai berikut [1].

Teorema 1.2 *Diberikan ruang metrik lengkap (X, d). Jika $f: X \to X$, merupakan pemetaan dari ke dirinya sendiri dan terdapat $k \in [0, 1)$ sehingga untuk setiap $x, y \in X$ berlaku*

$$d(f(x), f(y)) \leq k\, d(x, y),$$

maka f memiliki tepat satu titik tetap (memiliki titip tetap dan titik tetapnya tunggal). Lebih lanjut, untuk setiap titik awal $x_0 \in X$, iterasi $x_{n+1} = f(x_n)$ konvergen ke titik tetap tersebut.

Pemetaan yang memenuhi sifat yang disyaratkan pada Teorema 1.1 di atas disebut dengan pemetaan kontraksi Banach. Sejak teorema ini dipublikasikan, berbagai upaya perumuman dilakukan untuk memperlemah syarat kontraksi dengan harapan agar cakupan teorema titik tetap yang terkait dapat mencakup kelas pemetaan yang lebih banyak lagi. Beberapa artikel review telah membahas topik ini, misalnya Park [3] yang mengkaji keluarga teorema kelengkapan pada ruang metrik, serta Patil [4] yang menyoroti adanya tumpang tindih dalam publikasi hasil titik tetap. Namun, sejauh penelusuran yang dilakukan, belum ditemukan artikel review sederhana dalam bahasa Indonesia yang secara eksplisit menyajikan hubungan implikasi antar kelas perumuman dari pemetaan kontraksi Banach dalam satu kesatuan.

Ruang lingkup tulisan ini dibatasi pada dua hal untuk menjaga fokus pembahasan. Pertama, pemetaan yang dibahas adalah pemetaan bernilai tunggal (*single-valued mapping*), bukan pemetaan multinilai (*multivalued mapping*). Kedua, ruang yang digunakan adalah ruang metrik klasik seperti yang didefinisikan oleh Fr´echet dan Hausdorff, bukan ruang metrik umum seperti b-metrik, metrik *cone*, metrik parsial, atau ruang metrik terurut parsial. Dengan batasan ini, pembahasan diharapkan tetap fokus dan tidak melebar ke arah yang terlalu teknis.

Tulisan ini menyajikan tiga aspek penyajian yang membedakannya dari tinjauan literatur yang telah ada. Pertama, hubungan logis antarjenis pemetaan kontraksi yang biasanya hanya dibahas secara terpisah, di sini diintegrasikan ke dalam tabel dan diagram alur implikasi. Pembaca dapat langsung melihat hierarki kekuatan syarat, mana yang saling memengaruhi, dan mana yang berdiri sendiri; penyajian visual semacam ini jarang ditampilkan secara terpadu pada artikel ulasan sebelumnya. Kedua, bahasa dan struktur penulisan dirancang secara bertahap dengan penjelasan intuitif di balik setiap definisi, sehingga materi ini dapat dipahami dengan mudah oleh mahasiswa jenjang sarjana maupun peneliti yang baru pertama kali mempelajari teori titik tetap. Ketiga, setiap teorema perumuman tidak hanya dinyatakan sebagai hasil umum, tetapi juga dilengkapi petunjuk teknis mengenai cara memilih parameter atau fungsi pembanding agar kondisi tersebut kembali menyempit menjadi kontraksi Banach klasik. Pendekatan ini membantu pembaca melacak secara langsung bagaimana masing-masing generalisasi tetap berakar pada prinsip asli Banach.

2. Metode

Berdasarkan uraian dan target tulisan yang sebelumnya disampaikan melalui pendahuluan, dalam penyusunan artikel ini, metode yang digunakan adalah studi literatur secara sederhana dengan pendekatan komparatif. Pertama, dilakukan penelusuran dan seleksi artikel seminal yang membahas perumuman prinsip kontraksi Banach di ruang metrik klasik, dengan kriteria: pemetaan bernilai tunggal, ruang metrik lengkap, serta bentuk perumuman yang masih mempertahankan struktur kontraksi (bukan perluasan seperti Kannan). Dari hasil penelusuran, dipilih enam kelas perumuman utama, yaitu kontraksi Boyd-Wong, Meir-Keeler, quasi Ćirić, Reich, almost contraction Berinde, dan kontraksi orbital. Setiap kelas dikaji definisi, teorema titik tetap, kondisi reduksi ke Banach, serta contoh pembeda yang merujuk langsung pada literatur asli. Selanjutnya, dilakukan analisis implikasi antar kelas untuk menyusun tabel dan diagram hubungan logis. Penyusunan artikel juga mempertimbangkan aspek aksesibilitas bagi pembaca pemula dengan menyederhanakan bahasa dan struktur tanpa mengurangi ketepatan matematis. Seluruh kesimpulan dan peta implikasi diverifikasi silang dengan sumber primer untuk menjamin keakuratan.

Perlu dicatat bahwa beberapa hubungan implikasi antar kelas kontraksi dapat bersifat lebih kompleks tergantung pada asumsi ruang atau kondisi tambahan pada fungsi pembanding. Tinjauan ini menyajikan hubungan dalam bentuk paling dasar yang umum diajarkan pada tingkat pengantar, dan pembaca yang tertarik pada analisis teknis mendalam dirujuk ke karya komparatif peneliti-peneliti lainnya.

3. Prasyarat

Suatu ruang metrik (X, d) dikatakan sebagai ruang metrik lengkap jika setiap barisan Cauchy di X merupakan barisan yang juga konvergen ke suatu titik di X [1]. Sepanjang artikel ini, (X, d) selalu menyatakan ruang metrik lengkap. Selain itu, semua pemetaan yang dibahas adalah pemetaan bernilai tunggal (*single-valued mapping*).

4. Enam Teorema Titik Tetap Perumuman Prinsip Kontraksi Banach

Pada bagian ini akan diberikan definisi kontraksi masing-masing jenis kontraksi yang dibahas. Setelah itu diberikan juga teorema titik tetapnya dan penjelasan kapan kontraksi terkait ini menjadi kontraksi Banach. Selain itu di beberapa bagian juga disertakan contoh dari pemetaan yang memenuhi kontraksi perumuman yang di bahas, tapi tidak memenuhi kontraksi Banach.

4.1. Kontraksi Boyd-Wong (1969)

Berikut ini diberikan definisi kontraksi, teorema titik tetap, dan contoh dari kontraksi Boyd-Wong [5].

Definisi 4.1 *Pemetaan* $f: X \to X$ *disebut kontraksi Boyd-Wong jika terdapat fungsi*

$\phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ *yang memenuhi:*

i) $\phi(t) < t$ *untuk setiap* $t > 0$,

ii) ϕ *kontinu kanan di* 0,

iii) $d(f(x), f(y)) \leq \phi(d(x, y))$ *untuk semua* $x, y \in X$.

Teorema 4.2 *Jika* f *adalah kontraksi Boyd-Wong pada ruang metrik lengkap* (X, d), *maka* f *memiliki tepat satu titik tetap* $x^* \in X$. *Selain itu, untuk setiap* $x_0 \in X$, *iterasi* $x_{n+1} = f(x_n)$ *konvergen ke* x^*.

Catatan. *Kontraksi Boyd-Wong kembali ke kontraksi Banach jika* $\phi(t) = k\,t$ *dengan* $k \in [0, 1)$.

Contoh 4.3. *Fungsi* $f(x) = \frac{x}{1+x}$ *pada* $X = [0, \infty)$ *memenuhi teorema Boyd-Wong dengan* $\phi(t) = \frac{t}{1+t}$, *tetapi dapat dibuktikan bahwa* f *bukan kontraksi Banach.*

4.2. Kontraksi Meir-Keeler (1969)

Berikut ini diberikan definisi kontraksi, teorema titik tetap, dan contoh dari kontraksi Meir-Keeler [6].

Definisi 4.4 *Pemetaan* $f: X \to X$ *disebut kontraksi Meir-Keeler jika untuk setiap* $\varepsilon > 0$, *terdapat* $\delta > 0$ *sehingga untuk semua* $x, y \in X$:

$$\varepsilon \leq d(x, y) < \varepsilon + \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Teorema 4.5 Jika f adalah kontraksi Meir-Keeler pada ruang metrik lengkap (X, d), maka f memiliki tepat satu titik tetap $x^* \in X$.

Catatan. Kontraksi Meir-Keeler kembali ke kontraksi Banach jika terdapat $k \in [0,1)$ sehingga $d(f(x), f(y)) \leq k\, d(x, y)$. Dalam hal ini, untuk setiap $\varepsilon > 0$, pilih $\delta = \varepsilon\left(\frac{1}{k} - 1\right)$.

Contoh 4.6 *Fungsi* $f(x) = \frac{x}{2}$ *untuk* $x \in [0,1]$ *dan* $f(x) = \frac{x}{3}$ *untuk* $x \in [1, \infty)$ *pada* $X = [0, \infty)$ *memenuhi kondisi Meir-Keeler. Akan tetapi, pemetaan ini bukan kontraksi Banach.*

4.3. Kontraksi Quasi Ćirić (1974)

Berikut ini diberikan definisi kontraksi dan teorema titik tetap dari kontraksi Quasi Ćirić [7].

Definisi 4.7 *Pemetaan* $f: X \to X$ *disebut kontraksi quasi Ćirić jika terdapat* $h \in [0,1)$ *sehingga untuk semua* $x, y \in X$:

$$d(f(x), f(y)) \leq h\, M(x, y),$$

dengan $M(x, y) = max\{d(x, y), d(x, f(x)), d(y, f(y)), d(x, f(y)), d(y, f(x))\}$.

Teorema 4.8 *Jika* f *adalah kontraksi quasi Ćirić pada ruang metrik lengkap* (X, d), *maka* f *memiliki tepat satu titik tetap* $x^* \in X$.

Catatan. Kontraksi quasi Ćirić kembali ke kontraksi Banach jika suku $d(x, f(x)), d(y, f(y)), d(x, f(y)), d(y, f(x))$ tidak dominan, sehingga $M(x, y) = d(x, y)$.

Adapun contohnya, dapat merujuk langsung ke sumber asli untuk melihat contoh konkret. Dalam tulisan Ćirić [7], dibangun sebuah pemetaan pada himpunan dengan metrik tertentu yang memenuhi kondisi quasi kontraksi namun terbukti bukan kontraksi Banach.

4.4. Kontraksi Reich (1971)

Berikut ini diberikan definisi kontraksi dan teorema titik tetap dari kontraksi yang dikemukakan oleh Reich [8].

Definisi 4.9 Pemetaan $f: X \to X$ disebut kontraksi Reich jika terdapat $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ dengan $\alpha + \beta + \gamma < 1$ sehingga untuk semua $x, y \in X$:

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha\, d(x, y) + \beta\, d(x, f(x)) + \gamma\, d(y, f(y)).$$

Teorema 4.10 Jika f adalah kontraksi Reich pada ruang metrik lengkap (X, d), maka f memiliki tepat satu titik tetap $x^* \in X$.

Catatan. Kontraksi Reich kembali ke kontraksi Banach jika $\beta = \gamma = 0$ dan $\alpha = k < 1$.

Adapun contohnya, dapat merujuk langsung ke sumber asli untuk melihat contoh konkret. Dalam tulisan Reich [8], ditunjukkan bahwa terdapat pemetaan dengan parameter tertentu yang memenuhi kondisi Reich namun gagal memenuhi kondisi Banach karena tidak ada konstanta k < 1 yang seragam.

4.5. Weak ϕ-Contraction (Berinde, 2004)

Berikut ini diberikan definisi kontraksi, teorema titik tetap, dan contoh dari Weak ϕ-Contraction yang dikemukakan oleh Brinde [9].

Definisi 4.11 Pemetaan $f: X \to X$ disebut *weak ϕ-contraction* jika terdapat fungsi pembanding $\phi: [0, \infty) \to [0, \infty)$ (monoton naik, $\phi^n(t) \to 0$) dan $L \geq 0$ sehingga untuk semua $x, y \in X$:

$$d(f(x), f(y)) \leq \phi(d(x, y)) + Ld(y, f(x)).$$

Akibat d simetri, maka berlaku sebaliknya $d(f(x), f(y)) \leq \phi(d(x, y)) + Ld(x, f(y))$.

Teorema 4.12 Jika ϕ adalah fungsi pembanding tipe (c) (deret $\Sigma\, \phi^k(t)$ konvergen), maka f memiliki paling sedikit satu titik tetap, dan iterasi Picard konvergen ke suatu titik tetap.

Catatan. Jika $\phi(t) = \alpha t$ dengan $(0 < \alpha < 1)$, diperoleh *weak contraction* (kasus linear). Jika $L = 0$, maka f adalah ϕ-kontraksi, yang merupakan perumuman langsung kontraksi Banach. Jadi *weak ϕ-contraction* kembali ke Banach bila $\phi(t) = kt$ dan $L = 0$.

Contoh 4.13 Pemetaan identitas $f(x) = x$ pada [0,1]. Pilih $\phi(t) = \alpha t$ dengan $\alpha \in (0,1)$ dan $L \geq 1 - \alpha$. Kondisi terpenuhi tetapi f memiliki tak terhingga titik tetap, sehingga bukan kontraksi Banach.

4.6. Kontraksi Orbital

Berikut ini diberikan definisi kontraksi, teorema titik tetap, dan contoh dari kontraksi orbital. Kontraksi ini dikembangkan secara sistematis dalam kerangka operator dan kini secara luas dikenal sebagai Rus–Hicks–Rhoades contraction dalam literatur titik tetap modern [3],[10].

Definisi 4.14 Pemetaan $f: X \to X$ disebut kontraksi orbital jika terdapat $k < 1$ sehingga untuk setiap $x \in X$ berlaku:

$$d(f(x), f^2(x)) \leq k\, d(x, f(x)).$$

Teorema 4.15 Jika f adalah kontraksi orbital pada ruang metrik lengkap (X, d) dan f kontinu, maka f memiliki tepat satu titik tetap $x^* \in X$ dan untuk setiap $x_0 \in X$, iterasi $x_{n+1} = f(x_n)$ konvergen ke x^*.

Catatan. Kontraksi orbital kembali ke kontraksi Banach jika kondisi dipenuhi untuk semua x, y (tidak hanya sepanjang orbit), yaitu $d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$.

Contoh 4.16 Fungsi $f(x) = x/2$ untuk x rasional dan $f(x) = \frac{x}{3}$ untuk x irasional pada $X = \mathbb{R}$ memenuhi kontraksi orbital dengan $k = \frac{1}{2}$. Pemetaan ini bukan kontraksi Banach karena untuk x rasional dan y irasional yang saling berdekatan, rasio $\frac{d(f(x),f(y))}{d(x,y)}$ dapat mendekati 1.

5. Peta Implikasi Antar Kelas Kontraksi

Setelah menguraikan definisi dan karakteristik masing-masing kelas secara terpisah, langkah berikutnya adalah memetakan hubungan logis di antara mereka. Tabel 1 berikut menyajikan hasil sintesis literatur mengenai arah implikasi antar keenam kelas pemetaan kontraksi. Dalam tabel ini, tanda ✓ menunjukkan bahwa setiap pemetaan yang memenuhi kondisi pada baris tertentu secara otomatis juga memenuhi kondisi pada kolom yang bersesuaian. Tanda × menandakan tidak adanya implikasi umum (artinya, terdapat contoh pemetaan yang memenuhi syarat baris tetapi gagal memenuhi syarat kolom). Tanda = menunjukkan kesetaraan kelas. Peta implikasi ini memberikan gambaran sistematis mengenai hierarki kekuatan syarat kontraksi serta mengidentifikasi kelas-kelas yang bersifat independen satu sama lain.

Tabel 1: Tabel implikasi antar kelas kontraksi

Kelas	Banach	Boyd-Wong	Meir-Keeler	Ćirić	Reich	Weak ϕ	Orbital
Banach	=	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Boyd-Wong	×	=	×	×	×	×	×
Meir-Keeler	×	×	=	×	×	×	×
Ćirić	×	×	×	=	✓	×	×
Reich	×	×	×	×	=	×	×
1Weak ϕ	×	×	×	×	×	=	×
Orbital	×	×	×	×	×	×	=

Dari Tabel 1 di atas, dapat diinterpretasikan beberapa hal. Pertama, kelas Banach merupakan syarat terkuat karena secara langsung mengimplikasikan semua kelas lainnya melalui pemilihan parameter atau fungsi pembanding khusus. Sebaliknya, tidak ada satu pun kelas lain yang memaksa keberadaan konstanta kontraksi seragam $k < 1$ sehingga implikasi balik tidak berlaku. Kedua, kontraksi Ćirić dapat dipandang mengimplikasikan kontraksi Reich dalam banyak kasus, karena suku maksimum dalam definisi Ćirić secara alami mendominasi kombinasi linear Reich dengan pemilihan koefisien yang sesuai. Hubungan sebaliknya tidak berlaku karena Reich tidak mengontrol jarak silang $d(x, f(y))$ dan $d(y, f(x))$. Ketiga, kelas Boyd-Wong, Meir-Keeler, Weak φ, dan Orbital tidak saling mengimplikasikan satu sama lain; masing-masing memperlemah syarat Banach melalui pendekatan berbeda (fungsi pembanding, kondisi $\varepsilon - \delta$, suku toleransi L, dan kontrol sepanjang orbit) tanpa menghasilkan inklusi umum. Dengan demikian, hierarki kekuatan syarat dapat dipetakan sebagai: Banach (terkuat) → Ćirić →Reich, sedangkan Boyd-Wong, Meir-Keeler, Weak φ, dan Orbital membentuk cabang perumuman yang independen dan paralel.

6. Pembahasan

Sebagai sebuah tinjauan literatur sederhana, artikel ini menawarkan tiga kontribusi sinergis yang dirancang untuk menjembatani kesenjangan antara literatur klasik dan kebutuhan peneliti pemula. Pertama, disajikan peta implikasi antar kelas kontraksi dalam bentuk tabel dan diagram yang diintegrasikan secara eksplisit; penyajian visual komparatif semacam ini tidak dijumpai dalam ulasan terdahulu seperti Park [3] yang berfokus pada karakterisasi kelengkapan metrik maupun Patil [4] yang lebih menyoroti redundansi hasil, sehingga pembaca dapat langsung mengamati hierarki kekuatan dan independensi antar kondisi. Kedua, melalui penyederhanaan bahasa dan struktur pembahasan yang bertahap, ide-ide matematis dari karya-karya fondasional tahun 1960–1970an yang semula padat dan teknis diuraikan ulang agar lebih aksesibel bagi mahasiswa sarjana tanpa mengorbankan ketepatan definisi. Ketiga, setiap teorema dilengkapi catatan eksplisit mengenai kondisi reduksi ke kontraksi Banach, yang tidak hanya memperjelas bagaimana parameter atau fungsi pembanding khusus mengembalikan syarat ke bentuk linear klasik, tetapi juga membantu pembaca melacak secara langsung posisi setiap perumuman dalam spektrum keumuman. Secara keseluruhan, ketiga aspek ini bekerja simultan untuk menghasilkan sintesis yang sistematis, pedagogis, dan siap pakai sebagai landasan terstruktur bagi mahasiswa maupun peneliti yang baru memasuki bidang teori titik tetap metrik.

7. Kesimpulan

Dari pembahasan yang telah diuraikan, dua kesimpulan utama dapat ditarik. Pertama, kelas Banach merupakan kelas yang terkuat karena mengimplikasikan semua kelas lainnya, namun tidak ada satu pun kelas lain yang mengimplikasikan Banach. Kedua, kelas Boyd-Wong, Meir-Keeler, weak ϕ-contraction, dan orbital merupakan perumuman independen yang tidak saling mengimplikasikan satu sama lain; sementara itu, kelas Ćirić mengimplikasikan Reich, tetapi tidak sebaliknya.

Berdasarkan tinjauan ini, terdapat beberapa peluang penelitian lanjutan yang dapat ditindaklanjuti, antara lain: (1) perumuman pada ruang metrik tidak lengkap dengan penambahan syarat tertentu; (2) pengembangan teorema titik tetap bersama (*common fixed point*) untuk dua pemetaan; (3) perluasan perumuman menggunakan fungsi pembanding tidak monoton; (4) penerapan kelas weak ϕ-contraction dalam pembuktian eksistensi solusi persamaan diferensial dan integral; serta (5) perluasan keenam kelas pemetaan ke ruang b-metrik atau *cone metric*.

DAFTAR PUSTAKA

[1] S. Banach, "Sur les op´erations dans les ensembles abstraits et leur application aux´ equations int´egrales," *Fund. Math.*, vol. 3, pp. 133–181, 1922.

[2] S. S. Chauhan (Gonder), P. Garg, K. Thakur, and N. Saad, "Study of Metric Space and Its Variants," *J. Math.*, vol. 2022, pp. 1–22, 2022, https://doi.org/10.1155/2022/7142651.

[3] S. Park, "On the Family of Theorems on Metric Completeness," *Eur. J. Pure Appl. Math.*, vol. 17, no. 4, pp. 2370–2383, 2024, https://doi.org/10.29020/nybg.ejpam.v17i4.5440.

[4] J. Patil, B. Hardan, Y. M. Ahire, A. A. Hamoud, and A. Bachhav, "Recent Advances on Fixed Point Theorems," *Bull. Pure Appl. Sci. Sect. E Math. Stat.*, vol. 41E, no. 1, pp. 34–45, 2022, https://doi.org/10.5958/2320-3226.2022.00005.4.

[5] D. W. Boyd and J. S. W. Wong, "On nonlinear contractions," *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 20, no. 2, pp. 458–464, 1969, https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1969-0239559-9.

[6] A. Meir and E. Keeler, "A theorem on contraction mappings," *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 28, no. 2, pp. 326–329, 1969, https://doi.org/10.1016/0022-247X(69)90031-6.

[7] Lj. B. Ćirić, "A Generalization of Banach's Contraction Principle," *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 45, no. 2, pp. 267–273, 1974, https://doi.org/10.2307/2040075.

[8] S. Reich, "Some remarks concerning contraction mappings," *Canad. Math. Bull.*, vol. 14, no. 1, pp. 121–124, 1971, https://doi.org/10.4153/CMB-1971-024-9.

[9] V. Berinde, "Approximating fixed points of weak contractions using the Picard iteration," *Nonlinear Anal. Forum,* vol. 9, no. 1, pp. 43–53, 2004. https://www.academia.edu/70366427/Approximating_Fixed_Points_of_Weak_Contractions_Using_the_Picard_Iteration

[10] S. Park, "The realm of the Rus-Hicks-Rhoades maps in the metric fixed point theory," J. Nat. Acad. Sci. ROK, vol. 63, no. 1, pp. 1–45, 2024.